UNIVERSITE D'ABOMEY
CALAVI (BENIN)



THE ABDUS SALAM
INTERNATIONAL CENTRE FOR
THEORETICAL PHYSICS (ITALY)



INSTITUT DE MATHEMATIQUES ET DE SCIENCES PHYSIQUES

Centre d'Excellence Africain en Sciences Mathématiques et Applications
Adresse mail : secretariat@imsp-uac.org

MEMOIRE DE MASTER 2

FILIÈRE : Mathématiques Fondamentales et Applications
SPÉCIALITÉ : Analyse fonctionnelle

THEME

Comportement asymptotique et profils autosemblables des solutions de l'équation de la chaleur dans $\mathbb{R}^N$.

Rédigé par :

OGOUNCHI *Géraud Badélé*
Etudiant en MFA2 à l'IMSP
Email : geraud.ogounchi@imsp-uac.org

Sous la supervision :

PROF. **Nikita SIMONOV**
Maître de Conference (Associated Professor) at Sorbonne Université - Laboratoire Jacques-Louis Lions
Email : nikita.simonov(at)sorbonne-universite.fr

Membres du jury :

PROF. : **DEGLA** Guy (*Président du jury*)

DR. : **DOUMATE** Jonas

DR. : **HOUEDANOU** Wilfried

Soutenu le: 26/09/2025

B.P. : 613 PORTO-NOVO

REPUBLIQUE DU BENIN

Dédicace

À mon père et à ma mère,
pour leur amour, leur soutien et leurs encouragements constants
tout au long de mon parcours.

Remerciement

Je remercie tout particulièrement mon directeur de mémoire, **Prof. Nikita SIMONOV**, pour ses conseils avisés, sa disponibilité et son accompagnement constant tout au long de ce travail.

Mes remerciements vont également à l'endroit à mon professeur **Dr. AHOUNOU Bernadin** pour ses enseignements enrichissants et ses précieux conseils, ainsi qu'au **Prof. Marcos ABOUBACAR** pour m'avoir transmis sa passion pour les Équations aux Dérivées Partielles et m'avoir guidé dans mon apprentissage cette année.

Je souhaite exprimer ma reconnaissance au **Prof. Carlos OGOUYANDJOU**, Directeur de l'IMSP, pour son soutien institutionnel et son engagement envers la formation de ses étudiants.

À ma famille, je rends hommage à mon père, **Conseiller Pédagogique OGOUNCHI Jean-Baptiste**, et à ma mère, **AVOCIHOUN Pauline**, pour leur amour, leurs sacrifices et leur soutien indéfectible. À ma grande sœur, **OGOUNCHI Augustine**, qui a été comme une seconde mère pour moi, à son époux **TCHINININGBE Antoine** et à mon neveu **Dénis TCHINININGBE**, pour leur affection et leur soutien. Mes remerciements s'adressent également à mes frères et sœurs, **Valentin, Sylvain et Viviane**, pour leur présence et leurs encouragements constants.

Enfin, je remercie chaleureusement toutes celles et ceux qui ont jalonné ce parcours, chacun laissant sa marque dans l'aboutissement de ce travail.

Résumé

Nous étudierons dans ce mémoire le comportement asymptotique des solutions de l'équation de la chaleur posée dans $\mathbb{R}^N$. Après avoir construit la solution explicite grâce à la transformée de Fourier, nous analysons la convergence en temps long des solutions correspondant à des données initiales intégrables et positives.
Le résultat principal établit que toute solution converge, lorsque $t \longrightarrow \infty$, vers un profil gaussien auto-semblable de même masse. Cette convergence, valable dans les normes L^1, L^p et L^∞, constitue un analogue du Théorème Central Limite en théorie des probabilités.
Nous étudions ensuite les vitesses de convergence. En général, aucun taux universel ne peut être garanti. Cependant, si la donnée initiale possède des moments finis, il est possible d'obtenir des expansions asymptotiques en dérivées de la gaussienne et donc des taux précis, typiquement de l'ordre $t^{-1/2}$, t^{-1}, voire au-delà selon les conditions de moments.

Mots-clés : Équation de la chaleur ; comportement asymptotique ; profil auto-semblable ; gaussienne ; convergence en temps long ; taux de convergence ; conditions de moments.

Abstract

We study in this dissertation the asymptotic behavior of the solutions of the heat equation posed in $\mathbb{R}^n$. After constructing the explicit solution through the Fourier transform, we analyze the long-time convergence of solutions corresponding to integrable and positive initial data.
The main result establishes that every solution converges, as $t \longrightarrow \infty$, towards a self-similar Gaussian profile with the same mass. This convergence, valid in the L^1, L^p, and L^∞ norms, constitutes an analogue of the Central Limit Theorem in probability theory.
We then study the convergence rates. In general, no universal rate can be guaranteed. However, if the initial data possess finite moments, it is possible to obtain asymptotic expansions in terms of derivatives of the Gaussian, and hence precise rates, typically of order $t^{-1/2}$, t^{-1}, or even beyond depending on the moment conditions.

Keywords : Heat equation ; long-time behaviour ; self-similar profile ; Gaussian ; asymptotic convergence ; convergence rate ; moment conditions.

Table des matières

Liste des abréviations **vi**

Introduction **1**

Brève revue **3**

1 Rappels théoriques et outils analytiques **4**
1.1 Espaces fonctionnels de base et quelques théorèmes 4
1.1.1 Espace $L^p(\mathbb{R}^N)$ 4
1.1.2 Espace $\mathcal{C}^{2,1}$ 5
1.1.3 Espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ 5
1.2 Transformée de Fourier et quelques propriétés 6
1.3 Convolution et propriété 7
1.4 La fonction d'erreur erf 9
1.5 Semi-groupes linéaires 9

2 Construction de la solution à l'équation de la chaleur **11**
2.1 Formulation du problème et définitions 11
2.2 Solution fondamentale de l'(EC) par la transformation de Fourier 11
2.2.1 Solution fondamentale de l'(EC) par la méthode des solutions auto-semblables 16
2.2.2 Solution de Gauss avec masse M et analyse dimensionnelle . . . 19
2.3 Représentation intégrale des solutions 19
2.4 Principe du maximum faible et unicité 25
2.4.1 Cylindres paraboliques et principe du maximum faible 25
2.4.2 Principe du maximum pour les problèmes de Cauchy 27
2.5 Unicité pour le problème de Cauchy de l'équation de la chaleur 29
2.6 Régularité des solutions 30
2.7 Le semi-groupe de la chaleur 33
2.8 Estimations ultra-contractives 39
2.9 Estimations de régularité 41
2.10 Quelques propriétés fondamentales 43
2.10.1 Conservation de la masse pour $p = 1$. 43
2.10.2 Masse signée versus masse absolue. 43
2.10.3 Décroissance des normes L^p $(p > 1)$. 44
2.10.4 Premier moment (centre de masse). 44
2.10.5 Second moment. 44

3 Convergence en temps long des solutions avec donnée initiale non négative **46**
3.1 Convergence en norme L^1, L^∞et L^p 46
3.2 Preuve du Théorème 3.1.2 via la formule explicite 49

3.3 Preuve du Théorème 3.1.2 par mise à l'échelle 55

4 Taux de convergence et contre-exemples **60**
4.1 Convergence asymptotique vers la gaussienne par la représentation . . 60
4.1.1 Absence de vitesses explicites pour des données générales. Contre-exemple 65
4.1.2 Propagation infinie dans l'espace 66
4.2 Taux de convergence sous condition de moments 72

CONCLUSION **84**

BIBLIOGRAPHIE **85**

Liste des abréviations

(EC) Equation de la Chaleur. iv, 10, 11, 15

(PC) Problème de Cauchy de l'équation de la chaleur. 10

(SF) Solution Fondamenatale. 10

(SFG) Solution Fondamenatale Gaussienne. 12

C.f Confère. 3

EDO Equation Différentielle Ordinaire. 11

Introduction

L'équation de la chaleur classique $\partial_t u = \Delta u$, est l'un des objets les plus importants de la théorie des équations aux dérivées partielles, et elle revêt une grande importance dans les sciences appliquées. Elle a été développée depuis le travail fondateur de J. Fourier en 1822 [4], pour décrire des phénomènes de transport thermique et de diffusion dans de nombreux contextes. Les grands progrès de la théorie mathématique au cours de ces deux siècles ont eu une influence notable non seulement sur les EDP, mais aussi sur la Probabilité, l'Analyse Fonctionnelle ainsi que sur le Calcul numérique. Elle présente désormais des liens bien établis avec d'autres disciplines telles que la mécanique des fluides visqueux, la géométrie différentielle, le traitement d'images ou encore la finance. Pour davantage de motivations, voir les manuels classiques comme [3, 5] ou l'article de synthèse [7].

L'équation de la chaleur possède une théorie bien développée qui présente de nombreux traits caractéristiques. Elle peut être résolue dans divers cadres, adaptés à différents intérêts, qui conduisent à des résultats variés et mobilisent des outils distincts. Dans ce travail, nous étudierons le cadre le plus typique, le problème de Cauchy posé dans $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$:

$$\text{(PC)} \qquad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{dans } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

avec une donnée initiale $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Cette équation apparaît en Probabilité et dans la théorie des processus stochastiques comme la description en EDP du mouvement brownien ; dans cette interprétation, la fonction $u(\cdot, t)$ représente la densité de probabilité du processus au temps t, de sorte qu'elle doit être positive et que l'intégrale totale $\int u(x,t)\, dx$, souvent appelée la masse, doit être égale à un. De telles restrictions sur le signe et sur l'intégrale ne sont toutefois pas nécessaires dans l'étude analytique, et cette généralité supplémentaire s'avère commode aussi bien pour la théorie que pour plusieurs autres applications.

Ce mémoire est consacré à l'étude de ce comportement à long temps et à l'analyse des profils autosemblables associés. Dans un premier temps, nous présenterons les outils analytiques nécessaires, en insistant sur la structure du semi-groupe de la chaleur et sur les propriétés du noyau fondamental. Nous procéderons ensuite à la construction des solutions dans $\mathbb{R}^N$, en montrant comment la convolution avec la gaussienne permet de résoudre explicitement le problème de Cauchy tout en déterminant les espaces fonctionnels appropriés pour résoudre ce problème.

Une partie essentielle sera dédiée à la convergence vers le profil gaussien dans le cas de données initiales non négatives. Pour cela, nous mettrons en œuvre différentes approches : changement d'échelle, représentations intégrales et méthodes analytiques adaptées. Enfin, nous étudierons les vitesses de relaxation : sous certaines hypothèses de moments finis, des estimations quantitatives précises sont obtenues, et leur opti-

malité sera discutée à travers des exemples et contre-exemples.

Brève revue

L'étude du comportement asymptotique des solutions de l'équation de la chaleur a débuté avec les travaux de Fourier (1822), qui ont introduit la méthode de séparation des variables pour résoudre le problème de la diffusion thermique. La solution fondamentale de ce problème est la fonction gaussienne, qui représente un profil auto-semblable caractéristique de la diffusion. Ce phénomène est analogue au Théorème Central Limite en théorie des probabilités, où la somme de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées converge vers une distribution normale. Dans le contexte des équations aux dérivées partielles, cette convergence a été rigoureusement démontrée pour les solutions intégrables de l'équation de la chaleur, indépendamment de la forme de la donnée initiale, à condition que celle-ci soit non négative et intégrable [6].

Cependant, la vitesse de cette convergence est un sujet plus délicat. En général, il n'existe pas de taux uniforme de convergence pour toutes les solutions intégrables. Néanmoins, des résultats plus précis ont été obtenus sous certaines conditions. Par exemple, si la donnée initiale possède des moments finis, il est possible de quantifier la vitesse de convergence vers le profil gaussien. Ces taux dépendent des moments de la donnée initiale et peuvent être obtenus en utilisant des techniques d'analyse fonctionnelle et de représentation, telles que la méthode de mise à l'échelle (rescaling) et l'analyse en transformée de Fourier [6].

En outre, des travaux plus récents ont exploré le comportement asymptotique des solutions de l'équation de la chaleur dans des contextes plus généraux, tels que les espaces hyperboliques ou les équations de diffusion fractionnaire. Ces études ont permis de démontrer que, même dans ces cadres plus complexes, les solutions convergent vers un profil auto-semblable, bien que des corrections géométriques ou des ajustements spécifiques puissent être nécessaires pour décrire précisément cette convergence [7].

Ces résultats soulignent l'importance des profils auto-similaires dans la compréhension du comportement à long terme des solutions de l'équation de la chaleur et ouvrent la voie à des études plus approfondies sur les taux de convergence et les conditions sous lesquelles ces taux peuvent être optimisés.

CHAPITRE 1

Rappels théoriques et outils analytiques

Ce chapitre rassemble les notions et résultats fondamentaux utilisés dans le mémoire. On introduit d'abord les espaces fonctionnels de base, la transformée de Fourier et les semi-groupes de convolution, puis on énonce quelques inégalités fonctionnelles clées.

1.1 Espaces fonctionnels de base et quelques théorèmes

1.1.1 Espace $L^p(\mathbb{R}^N)$

Définition 1.1.1 (C.f [1] § section 4.2)
Soit $1 < p < \infty$, on définit :

$$L^p(\mathbb{R}^N) = \left\{ f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ mesurable et } |f(x)|^p \in L^1(\mathbb{R}^N) \right\}$$

On note

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f|^p \right)^{1/p}$$

la norme sur $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Définition 1.1.2 (C.f [1] § section 4.2)
Pour $p = \infty$, on définit :

$$L^\infty(\mathbb{R}^N) = \left\{ f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R};\ f \text{ mesurable et il existe } c \text{ tel que } |f(x)| \leqslant c \text{ p.p sur } \mathbb{R}^N \right\}$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \inf \left\{ c;\ |f(x)| \leqslant c,\ p.p \text{ sur } \mathbb{R}^N \right\}$$

la norme sur $L^\infty(\mathbb{R}^N)$

Notation
On notera parfois L^p pour désigner $L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\|f\|_p$ pour désigner $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$.

1.1.2 Espace $\mathcal{C}^{2,1}$

On définit our un domaine $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$:

$$\mathcal{C}^{2,1}\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}\right) = \left\{ u : Q \longrightarrow \mathbb{R} \;\middle|\; u \text{ est continue, } \partial_x^2 u,\ \partial_t u \text{ existent et sont continues sur } Q \right\}.$$

Ici :
— le 2 dans $\mathcal{C}^{2,1}\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}\right)$ correspond aux dérivées spatiales jusqu'au second ordre : $\partial_{x_i} u, \partial_{x_i x_j} u$,
— le 1 dans $\mathcal{C}^{2,1}\left(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}\right)$ correspond à la dérivée temporelle : $\partial_t u$.

1.1.3 Espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

On désigne par $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{R}^N$.

Normes. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut munir $C_c^k(\mathbb{R}^N)$ de la norme :

$$\|f\|_{C^k} := \sup_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha f\|_\infty,$$

où α est un multi-indice, et $D^\alpha f$ désigne la dérivée partielle correspondante.

Densité. L'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leqslant p < \infty$.

Quelques propriétés.
— $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est un espace vectoriel stable par addition, multiplication par un scalaire, multiplication de fonctions, et convolution.
— Il est stable par dérivation : si $f \in C_c^\infty$, alors $D^\alpha f \in C_c^\infty$ pour tout multi-indice α.
— Il est stable par convolution avec une fonction dans L^1 : si $\phi \in C_c^\infty$, et $f \in L^p$, alors $f * \phi \in C^\infty$, et on a :

$$D^\alpha(f * \phi) = f * D^\alpha \phi.$$

Théorème 1.1.3 (Arzelà–Ascoli sur un compact) *Soit $K \subset \mathbb{R}^N \times [0,T]$ un sous-ensemble compact pour la topologie produit. Une famille $\mathcal{F} \subset C(K)$ est relativement compacte dans $\big(C(K), \|\cdot\|_\infty\big)$ si et seulement si :*

1. ***Uniformément bornée :** il existe $M > 0$ tel que*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{(x,t) \in K} \big|f(x,t)\big| \leqslant M.$$

2. ***Équicontinuité :*** *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tous (x,t), $(y,s) \in K$ satisfaisant $\|(x,t)-(y,s)\| < \delta$,*

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} |f(x,t)-f(y,s)| \ < \ \varepsilon.$$

En particulier, toute suite $(f_n) \subset \mathcal{F}$ possède une sous-suite qui converge uniformément sur K.

1.2 Transformée de Fourier et quelques propriétés

Définition 1.2.1
*Soit $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$. On définit la **transformée de Fourier** de u par :*

$$\mathcal{F}(u)(\xi) = \widehat{u}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ix\cdot\xi} u(x)\, dx \qquad (\xi \in \mathbb{R}^N)$$

*et sa **transformée de Fourier inverse** par :*

$$\mathcal{F}^{-1}(u)(x) = \check{u}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\cdot\xi} u(\xi)\, d\xi \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

Proposition 1.2.2 (Quelques propriétés de la transformée de Fourier)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Alors :

1. *$\widehat{f}$ est continue et bornée sur $\mathbb{R}^N$, et*

$$\lim_{|\xi|\longrightarrow\infty} \left|\widehat{f}(\xi)\right| = 0.$$

2. *Si pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $|\alpha| \leqslant m$, on a $x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $\widehat{f} \in C^m(\mathbb{R}^N)$ et :*

$$D^\alpha \widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} (-ix)^\alpha e^{-ix\cdot\xi} f(x)\, dx.$$

3. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N)$, alors $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ et :*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} \quad \textit{(égalité de Plancherel).}$$

4. *Pour tout $a \in \mathbb{R}^N$, on a :*

$$\widehat{f(\cdot - a)}(\xi) = e^{-ia\cdot\xi}\widehat{f}(\xi), \qquad \widehat{e^{ia\cdot x} f(x)}(\xi) = \widehat{f}(\xi - a).$$

5. *Pour tout $\lambda > 0$, on a :*

$$\widehat{f(\lambda x)}(\xi) = \lambda^{-d} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

1.3 Convolution et propriété

Définition 1.3.1
Soient f et g deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^N$. On définit leur convolution $f * g$ par :

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\, g(y)\, dy,$$

lorsque l'intégrale est bien définie.

Propriétés fondamentales

- **Commutativité :** $f * g = g * f$.
- **Associativité :** $(f * g) * h = f * (g * h)$ si les convolutions sont bien définies.
- **Linéarité :** L'opération de convolution est bilinéaire.
- **Inégalité de Young :** Si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et :

$$\|f * g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}.$$

- **Régularisation :** Si $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, on a $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, et toutes les dérivées de $f * g$ sont données par :

(Reg) $$D^\alpha (f * g) = f * D^\alpha g.$$

Proposition 1.3.2
Soit $f, g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, $d \geqslant 1$, $p \in [1, \infty]$, $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors

$$\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \quad \leqslant \quad \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^N)},$$

où $*$ indique le produit de convolution.

Preuve. Soient x, $y \in \mathbb{R}^N$. Par définition, le produit de convolution est donné par :

(1.1) $$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(y) g(x-y)\, dy.$$

Nous cherchons à majorer $\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$. Par la définition de la norme $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, nous

avons :

$$\|f * g\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |(f * g)(x)|.$$

1er cas : $p = 1$, $q = \infty$.

$$\begin{aligned}
|f * g(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y\right| \quad \text{[En utilisant la définition (1.1)]} \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)g(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,||g(y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} |f(x-y)|\,\mathrm{d}y \\
&\leqslant \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} |f(y-x)|\,\mathrm{d}y \\
&= \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} |f(z)|\,\mathrm{d}z \quad [\text{avec } z = y-x] \\
&= \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

Ainsi, en prenant le supremum sur x, on obtient :

$$\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

2è cas : $p = \infty$.

Compte tenu du fait que le produit de convolution est commutatif alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ on a : $f * g(x)(x) = g * f(x)$. En utilisant le 1er cas, on obtient : $\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$.

3è cas : $1 < p < \infty$.

On prend q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, en utilisant l'inégalité de Hölder avec p et q, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
|(f * g)(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} f(y)g(x-y)\,dy\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |f(y)||g(x-y)|\,dy.
\end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder, avec $\|f\|_{L^p}$ et $\|g\|_{L^q}$, nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(y)||g(x-y)|\,dy \leqslant \|f\|_{L^p} \|g(\cdot - x)\|_{L^q}.$$

Or, la translation d'une fonction g dans $L^q(\mathbb{R}^N)$ ne modifie pas sa norme L^q, donc

$\|g(\cdot - x)\|_{L^q} = \|g\|_{L^q}$. Ainsi :

$$|(f * g)(x)| \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

En prenant le supremum sur x, on obtient :

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Ceci conclut la démonstration.

■

1.4 La fonction d'erreur erf

Définition 1.4.1 (fonction d'erreur erf)
La fonction d'erreur, notée erf*, est définie pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *par*

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 1.4.2
La fonction erf *est une fonction impaire, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$*. On a les valeurs limites*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \operatorname{erf}(x) = 1, \qquad \lim_{x \longrightarrow -\infty} \operatorname{erf}(x) = -1,$$

et en particulier $\operatorname{erf}(0) = 0$*.*

▫ **Relation avec la fonction de répartition Φ de la gaussienne G.** En effectuant le changement $t = \sqrt{2}u$, en scindant l'intégrale en $(-\infty, 0]$ et $[0, x/\sqrt{2}]$, et en utilisant $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} = \sqrt{\pi}$ puis grâce à la définition de erf, on obtient

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

1.5 Semi-groupes linéaires

Définition 1.5.1 (Semi-groupe de la chaleur)
Soit X *un espace de Banach. Pour tout* $t \geqslant 0$*, on définit une application linéaire*

$$S(t)\colon X(\mathbb{R}^N) \ni U_0 \longmapsto U(t,\cdot) \in X,$$

où U est la solution du problème de Cauchy sans second membre de donnée initiale U_0. La famille $(S(t))_{t\geqslant 0}$ est appelée « semi-groupe de la chaleur », et souvent notée

$$S(t) = e^{t\,\Delta_x}.$$

Définition 1.5.2 (Semi-groupe fortement continu)
Soit X un espace de Banach et $(S_t)_{t\geqslant 0}$ une une famille d'opérateurs linéaires continus de X dans lui même. On dit que c'est un semi-groupe fortement continu si :

(i) $S(0) = Id$,

(ii) $S(t+s) = S(s)S(t)$, *pour tout tous* $t, s \geqslant 0$,

(iii) Pour tout $u_0 \in X$, *la fonction* $t \longmapsto S(t)u_0$ *est continue de* $[0, +\infty[$ *à valeur dans* X.

On dit de plus qu'il est contractant si :

(iv) $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leqslant 1$ *pour tout* $t \geqslant 0$.

Notation
On notera parfois dans ce mémoire S_t au lieu de $S(t)$.

CHAPITRE 2

Construction de la solution à l'équation de la chaleur

L'objectif de ce chapitre est d'identifier explicitement la solution fondamentale (noyau de la chaleur) afin d'obtenir la représentaion intégrale des solutions du problème de cauchy.

2.1 Formulation du problème et définitions

On considère le problème de Cauchy à l'équation de la chaleur

$$\text{(PC)} \qquad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u & \text{dans } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ u(x,0) = u_0(x) & \text{sur } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

La résolution du problème de Cauchy (PC) consiste à trouver une fonction $u : \mathbb{R}^N \times [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant cette EDP en un sens classique (ou faible) pour $t > 0$ et telle que $u(\cdot, t) \longrightarrow u_0$ lorsque $t \longrightarrow 0^+$.

Notation
On note $M = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\, dx$ *la masse totale initiale.*

2.2 Solution fondamentale de l'(EC) par la transformation de Fourier

Définition 2.2.1 (Solution fondamentale)
On appelle solution fondamentale de l'équation de la chaleur, la solution de l'équation avec les données initiales « Dirac delta » :

$$\text{(SF)} \qquad \begin{cases} \partial_t U = \Delta U & \textit{dans } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ U(x,0) = \delta_0(x) & \textit{sur } \mathbb{R}^N. \end{cases}$$

Le sens de (SF) est à comprendre comme (2.1). On dira donc qu'une fonction $U \in C^2\left(]0, +\infty[\times \mathbb{R}^N\right)$ avec $U \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t \in]0, +\infty[$ est une solution de l'équation de la chaleur si elle satisfait :
(2.1)

$$\begin{cases} \partial_t U = \Delta U, \text{ dans } \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\\ \lim_{t \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} U(t,x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(0), \text{ pour toute fonction } \varphi \text{ continue et bornée.} \end{cases}$$

La seconde égalité est définie comme *une trace* lorsque $t \downarrow 0$, pour U dans le dual de l'espace des fonctions continues et bornées.

Théorème 2.2.2 *La solution fondamentale de (EC) est donnée par la formule :*

$$G(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right). \tag{SFG}$$

pour tout $0 < t$ *et* $x \in \mathbb{R}^N$

Preuve. Nous cherchons la solution de SF en passant par la transformée de Fourier en x.

Pour chaque $t > 0$, on a :

$$\widehat{U}(\xi,t) \;=\; \mathcal{F}_x\big[U(\cdot,t)\big](\xi) \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\,x\cdot\xi}\, U(x,t)\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

La transformée inverse est :

$$U(x,t) \;=\; \mathcal{F}_{\xi}^{-1}\big[\widehat{U}(\cdot,t)\big](x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\,x\cdot\xi}\, \widehat{U}(\xi,t)\,d\xi.$$

Appliquons la transformée de Fourier en x à l'équation $\partial_t U = \Delta_x U$. Soit $\xi \in \mathbb{R}^N$ et $t > 0$.

$$\mathcal{F}_x[\partial_t U] = \mathcal{F}_x[\Delta_x U] \iff \partial_t \widehat{U}(\xi,t) = -|\xi|^2\, \widehat{U}(\xi,t) \tag{2.2}$$

Alors, en appliquant la deuxième égalité de (2.1) avec $\varphi(x) = e^{i\xi\cdot x}$, on obtient :

$$\lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot x} U(t,x)\,dx = e^{-i\xi\cdot 0} = 1$$

ce qui signifie que

$$\widehat{U}(\xi,0) \;=\; 1 \tag{2.3}$$

En fixant $\xi_i n \mathbb{R}^N$, on obtient de (2.2) et (2.3) l'EDO suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \widehat{U}(\xi,t) + |\xi|^2\, \widehat{U}(\xi,t) = 0, & t \in]0,+\infty[\\ \widehat{U}(\xi,0) = 1, & t = 0 \end{cases} \tag{EDO}$$

La solution de l'EDO est donnée par :

$$\widehat{U}(\xi,t) \;=\; \exp\big(-|\xi|^2\, t\big)$$

Passons à présent à l'inverse du Fourier. On a :

$$U(x,t) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{i\,x\cdot\xi}\, e^{-|\xi|^2\, t}\,d\xi$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t\,|\xi|^2 + i\,x\cdot\xi}\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t\left|\xi-\frac{i\,x}{2\,t}\right|^2 + t\left|\frac{i\,x}{2\,t}\right|^2}\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t\left|\xi-\frac{i\,x}{2\,t}\right|^2 - \frac{|x|^2}{4\,t}}\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\exp\Big(-\tfrac{|x|^2}{4\,t}\Big)\int_{\mathbb{R}^N}\exp\Big(-t\,|\xi-\tfrac{i\,x}{2\,t}|^2\Big)\,d\xi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\exp\Big(-\tfrac{|x|^2}{4\,t}\Big)\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t\,|\eta|^2}\,d\eta \quad \Big(\text{En posant} \quad \eta = \xi - \tfrac{i\,x}{2\,t}\Big) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^N}\left(\tfrac{\pi}{t}\right)^{N/2}\exp\Big(-\tfrac{|x|^2}{4\,t}\Big) \\
U(\xi,t) &= \frac{1}{(4\pi\,t)^{N/2}}\exp\Big(-\tfrac{|x|^2}{4\,t}\Big)
\end{aligned}
$$

On reconnaît ainsi le noyau de la chaleur $G(x,t) = \dfrac{1}{(4\pi\,t)^{N/2}}\exp\left(-\dfrac{|x|^2}{4t}\right)$ ■

La transformée de Fourier étant une application injective sur $\mathcal{S}$ (espace de Schwartz) alors la fonction G est unique si elle existe.

Lemme 2.2.3 (L'intégrale de (SFG))
Pour tout $t > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} U(x,t)\,dx \;=\; 1.$$

Preuve.

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} U(x,t)\,dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx \\
&= \frac{1}{\pi^{N/2}}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2}\,dz \quad \Big(\text{avec } z = \frac{x}{2t^{N/2}}\Big) \\
&= \frac{1}{\pi^{N/2}}\prod_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_i^2}\,dz \quad \text{où} \quad e^{-|z|^2} = \prod_{i=1}^{N} e^{-z_i^2} \\
&= \frac{1}{\pi^{N/2}}\prod_{i=1}^{N}\pi^{1/2} \\
\int_{\mathbb{R}^N} U(x,t)\,dx &= 1
\end{aligned}
$$

■

Lemme 2.2.4

$$\int_{\mathbb{R}^N} |z|^2\,(4\pi t)^{-N/2} e^{-\frac{|z|^2}{4t}}\,\mathrm{d}z = 2Nt.$$

Preuve.

$$\int_{\mathbb{R}^N} |z|^2 \, (4\pi t)^{-N/2} \exp\Big(-\frac{|z|^2}{4t}\Big) \, \mathrm{d}z = (4\pi t)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} |z|^2 \exp\Big(-\frac{|z|^2}{4t}\Big) \, \mathrm{d}z.$$

En coordonnées polaires $\Big(r = |z|, \ \mathrm{d}z = r^{N-1} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}S, \text{ avec } \int_{S^{N-1}} \mathrm{d}S = |S^{N-1}| = \frac{2\pi^{N/2}}{G(N/2)} \Big)$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |z|^2 \, (4\pi t)^{-N/2} \exp\Big(-\frac{|z|^2}{4t}\Big) \, \mathrm{d}z &= (4\pi t)^{-N/2} \, |S^{N-1}| \int_0^\infty r^2 \, r^{N-1} \, e^{-r^2/(4t)} \, \mathrm{d}r \\ &= (4\pi t)^{-N/2} \, \frac{2\pi^{N/2}}{G(\frac{N}{2})} \int_0^\infty r^{N+1} \, e^{-r^2/(4t)} \, \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

Pour calculer l'intégrale en r, posons $u = r^2/(4t)$, donc $r = 2\sqrt{t\,u}$, $\mathrm{d}r = \sqrt{t/u} \, \mathrm{d}u$, et

$$r^{N+1} \, \mathrm{d}r = (2\sqrt{t\,u})^{N+1} \sqrt{\frac{t}{u}} \, \mathrm{d}u = 2^{N+1} \, t^{(N+2)/2} \, u^{N/2} \, \mathrm{d}u.$$

D'où

$$\int_0^\infty r^{N+1} e^{-r^2/(4t)} \, \mathrm{d}r = 2^{N+1} t^{(N+2)/2} \int_0^\infty u^{N/2} e^{-u} \, \mathrm{d}u = 2^{N+1} t^{(N+2)/2} \, G\big(\tfrac{N}{2} + 1\big).$$

Rappelons que $G(\frac{N}{2} + 1) = \frac{N}{2} \, G(\frac{N}{2})$. Donc

$$\int_0^\infty r^{N+1} e^{-r^2/(4t)} \, \mathrm{d}r = 2^{N+1} t^{(N+2)/2} \, \frac{N}{2} \, G\big(\tfrac{N}{2}\big) = N \, 2^N \, t^{(N+2)/2} \, G\big(\tfrac{N}{2}\big).$$

En reportant dans l'expression initiale :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |z|^2 \, (4\pi t)^{-N/2} e^{-|z|^2/(4t)} \, \mathrm{d}z &= (4\pi t)^{-N/2} \, \frac{2\pi^{N/2}}{G(\frac{N}{2})} \, \big[N \, 2^N \, t^{(N+2)/2} \, G(\tfrac{N}{2}) \big] \\ &= N \, (4\pi t)^{-N/2} \, 2\pi^{N/2} \, 2^N \, t^{(N+2)/2} \\ &= N \, \frac{2^N}{(4\pi t)^{N/2}} \, \pi^{N/2} \, 2 \, t^{(N+2)/2} \\ &= 2Nt. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.2.5 *$U(x,t) \longrightarrow \delta_0(x)$ quand $t \longrightarrow 0^+$ au sens des distribution, c-a-d,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} U(x,t)\varphi(x)dx \ \longrightarrow \ \langle \delta_0, \varphi \rangle := \varphi(0), \quad \textit{pour tout } \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \textit{quand } \ t \longrightarrow 0^+.$$

Preuve. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Alors il existe $R > 0$ tel que

$$\mathrm{Supp}(\varphi) \subset B(0,R).$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} U(x,t)\,\varphi(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} U(x,t)\big[\varphi(x)-\varphi(0)+\varphi(0)\big]\,dx \\ &= \varphi(0)\int_{\mathbb{R}^N} U(x+t)\,dx \;+\; \int_{\mathbb{R}^N} U(x,t)\big[\varphi(x)-\varphi(0)\big]\,dx \\ &= \varphi(0) \;+\; \int_{B(0,R)} U(x,t)\big[\varphi(x)-\varphi(0)\big]\,dx,\end{aligned}$$

puisque $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} U(x,t)\,dx = 1$ d'après le Lemme 2.2.3.

Désignons par $\omega_n := \omega_n\big(B(0,R)\big)$ la mesure de B$(0,R)$.

$$\begin{aligned}\left|\int_{B(0,R)} U(x,t)\big[\varphi(x)-\varphi(0)\big]\,dx\right| &\leqslant \int_{B(0,R)} \big|U(x,t)\big|\,\big|\varphi(x)-\varphi(0)\big|\,dx \\ &\leqslant \|\nabla\varphi\|_\infty \int_{B(0,R)} |x|\,\big|U(x,t)\big|\,dx \\ &\leqslant \|\nabla\varphi\|_\infty \int_{B(0,R)} |x|\,\frac{1}{(4\pi t)^{N/2}}\,e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx \\ &\leqslant \|\nabla\varphi\|_\infty\,\frac{R}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{R^2}{4t}}\;\omega_n\big(B(0,R)\big) \\ &\longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } t \downarrow 0^+\end{aligned}$$

car $\|\nabla\varphi\|_\infty < \infty$ et $\omega_n\big(B(0,R)\big) < \infty$

Il en résulte que

$$\int_{\mathbb{R}^N} U(x,t)\varphi(x)dx \;\longrightarrow\; \varphi(0) \;=:\; \langle\delta_0,\varphi\rangle$$

■

Théorème 2.2.6 *La famille $U(x,t_n)$, pour $t_n \longrightarrow 0$, est une approximation C^∞ de l'identité.*

Preuve. On fixe une suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ avec $t_n > 0$ et $t_n \longrightarrow 0$. Notons pour simplifier

$$U_n(x) \;=\; U(x,t_n) \;=\; (4\pi\,t_n)^{-\frac{N}{2}} \exp\Big(-\tfrac{|x|^2}{4\,t_n}\Big).$$

i. Régularité C^∞. Pour chaque $t_n > 0$, la fonction $x \longmapsto (4\pi\,t_n)^{-\frac{N}{2}} \exp\Big(-\tfrac{|x|^2}{4\,t_n}\Big)$ est de dérivable et continue sur $\mathbb{R}^N$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, $D^N U_n(x) = P_n(x)\exp\Big(-\tfrac{|x|^2}{4\,t_n}\Big)$ où P_n est un polynôme de degré n. On voit que $D^N U_n(x)$ est dérivable et continue sur $\mathbb{R}^N$ en tant produit de fonctions polynôme et exponentielle. Par suite $U_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$.

ii. Normalisation. En s'inspirant de Lemme 2.2.3, on a bien pour chaque $t_n > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} U(x, t_n)\, dx = 1$$

De plus Supp $(U_n) = \overline{(0, +\infty[}$.

iii. Convergence vers δ_0. Soit une fonction test $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. En utilisant le même raisonnement pour chaque t_n du Théorème 2.2.5, on a bien :

$$\int_{\mathbb{R}^N} U_n(x)\, \varphi(x)\, dx \longrightarrow \varphi(0) \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty.$$

Il en résulte que $U(x, t_n)$, pour $t_n \longrightarrow 0$, est une approximation C^∞ de l'identité. ■

Notation
*La fonction U est connue sous le nom de **Fonction gaussienne** ou **noyau gaussien** et nous utilisons la notation $G(x,t)$ ou $G_t(x)$. Dans les applications en probabilité, $G(x,t)$ est la densité de la loi normale de variance $2t$.*

2.2.1 Solution fondamentale de l'(EC) par la méthode des solutions auto-semblables

Etape 1. Montrons que s'il existe une solution $U \in C^\infty\big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)\times]0, +\infty[\big)$ de (2.1), alors :

i) Pour tout $\lambda > 0$, $U(t,x) = \lambda^{-n}\, U\big(\lambda^2 t, \lambda x\big)$.

ii) U est radiale, c'est à dire $U(t, x_1) = U(t, x_2)$ dès que $|x_1| = |x_2|$.

Soit $\lambda > 0$ et posons $\widetilde{U}(t,x) = \lambda^{-n}\, U\big(\lambda^2 t, \lambda x\big)$. On a :

$$\partial_t \widetilde{U}(t,x) = \lambda^{-n}\, \lambda^2\, \partial_t U(\lambda^2 t, \lambda x) = \lambda^{-n}\, \lambda^2\, \Delta_x U(\lambda^2 t, \lambda x) = \Delta_x \widetilde{U}(t,x),$$

donc $\partial_t \widetilde{U}(t,x) = \Delta_x \widetilde{U}(t,x)$.
Par ailleurs, soit φ une fonction continue borné.

En effectuant le changement de variable $y = \frac{\lambda}{x}$, posons $\widetilde{\varphi}(y) = \varphi(x)$. On obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widetilde{U}(t,x)\, \varphi(x)\, dx = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^N} U(\lambda^2 t, \lambda x)\, \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} U(\lambda^2 t, y)\, \widetilde{\varphi}(y)\, dy.$$

Comme $\lim_{t\downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^N} U(\lambda^2 t, y)\, \widetilde{\varphi}(y)\, dy = \widetilde{\varphi}(0) = \varphi(0)$, on conclut que $\widetilde{U}$ satisfait aussi la condition trace.

Par unicité de la solution, on a donc $\widetilde{U} = U$.

Pour la radialité, soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^N$ tels que $|x_1| = |x_2|$. Choisissons une rotation orthogonale $R \in O(n)$ telle que $Rx_1 = x_2$, et posons :

$$\overline{U}(t,x) = U\big(t, Rx\big).$$

Les mêmes calculs montrent que $\overline{U}$ vérifie (2.1), donc par unicité $\overline{U} = U$. Ainsi

$$U(t, x_1) = U(t, Rx_1) = U(t, x_2),$$

Etape 2. Nous observons que si U est solution l'équation principale de (PC), alors $U(\lambda x, \lambda^2 t)$ l'est aussi pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

En posant $\lambda = \frac{1}{t}$, la méthode consistera de façon plus rapide à chercher une solution U de la forme particulière :

$$U(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} F\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad (x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0), \tag{2.4}$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et la fonction $F\colon \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ restent à déterminer. Cette structure est obtenue en exigeant que la solution soit invariante par la dilatation.

Nous allons éjecter U dans (PC). Pour cela, posons $\xi = t^{-\beta}x$.

■ **Calcul du Laplacien ΔU.** Pour chaque $i = 1, \dots, n$, on a :

$$\partial_{x_i} U(x,t) = t^{-\alpha} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial F}{\partial \xi_j}(\xi) \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = t^{-\alpha} \cdot \frac{\partial F}{\partial \xi_i}(\xi) \cdot t^{-\beta} = t^{-\alpha-\beta} \cdot \partial_{\xi_i} F(\xi).$$

Alors,

$$\partial^2_{x_i} u(x,t) = \partial_{x_i}\left(t^{-\alpha-\beta} \cdot \partial_{\xi_i} F(\xi)\right) = t^{-\alpha-\beta} \cdot \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_j \partial \xi_i}(\xi) \cdot \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i}.$$

Or, $\frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} = t^{-\beta}\delta_{ij}$, donc

$$\partial^2_{x_i} u(x,t) = t^{-\alpha-\beta} \cdot t^{-\beta} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i^2}(\xi) = t^{-\alpha-2\beta} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i^2}(\xi).$$

En sommant sur $i = 1, \dots, n$, on obtient :

$$\Delta u(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \partial^2_{x_i} u(x,t) = t^{-\alpha-2\beta} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_i^2}(\xi) = t^{-\alpha-2\beta} \cdot \Delta F(\xi).$$

On obtient à présent l'équation :

$$\partial_t U(x,t) - \Delta U(x,t) = \alpha\, t^{-(\alpha+1)} F(\xi) + \beta\, t^{-(\alpha+1)}\, \xi \cdot DF(\xi) + t^{-(\alpha+2\beta)}\, \Delta F(\xi) = 0, \tag{2.5}$$

Pour que les puissances de t disparaissent, prenons $\beta = \frac{1}{2}$. En posant $F := F(\xi)$, l'équation (2.5) se réduit alors à :

$$\alpha\, F + \tfrac{1}{2}\, \xi \cdot DF + \Delta F = 0. \tag{2.6}$$

Nous allons résoudre cette équation en posant $F(\xi) = w(|\xi|)$ avec $w\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

■ **Calculons d'abord le Laplacien de F.** On a : $\Delta F(\xi) = \sum_{i=1}^{N} \partial_{ii}^2 F(\xi)$.
On a :

$$\begin{aligned}
\partial_i F(\xi) &= \tfrac{d}{d\xi_i} w(r) = \tfrac{dw}{dr}(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi_i} \\
&= \tfrac{dw}{dr}(r) \cdot \frac{\xi_i}{r} \\
\partial_{ii}^2 F(\xi) &= \partial_i \left(\tfrac{dw}{dr}(r) \cdot \frac{\xi_i}{r} \right) \\
&= \tfrac{d^2w}{dr^2}(r) \cdot \left(\frac{\xi_i}{r} \right)^2 + \tfrac{dw}{dr}(r) \cdot \partial_i \left(\frac{\xi_i}{r} \right) \\
&= \tfrac{d^2w}{dr^2}(r) \cdot \frac{\xi_i^2}{r^2} + \tfrac{dw}{dr}(r) \cdot \frac{r^2 - \xi_i^2}{r^3}
\end{aligned}$$

Alors en sommant sur i, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Delta F(\xi) &= \sum_{i=1}^{N} \left[\tfrac{d^2w}{dr^2}(r) \cdot \frac{\xi_i^2}{r^2} + \tfrac{dw}{dr}(r) \cdot \frac{r^2 - \xi_i^2}{r^3} \right] \\
&= \tfrac{d^2w}{dr^2}(r) \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{\xi_i^2}{r^2} + \tfrac{dw}{dr}(r) \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{r^2 - \xi_i^2}{r^3}
\end{aligned}$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\xi_i^2}{r^2} = \frac{1}{r^2} \sum_{i=1}^{N} \xi_i^2 = \frac{r^2}{r^2} = 1, \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{r^2 - \xi_i^2}{r^3} = \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^{N} (r^2 - \xi_i^2) = \frac{(n-1)r^2}{r^3} = \frac{n-1}{r}.$$

On en déduit :

$$\Delta F(\xi) = \tfrac{d^2w}{dr^2}(r) + \tfrac{n-1}{r} \cdot \tfrac{dw}{dr}(r).$$

L'équation (2.6) devient alors

$$\alpha\, w + \tfrac{1}{2}\, r\, \tfrac{d}{dr} w + \tfrac{d^2}{dr^2} w + \tfrac{n-1}{r}\, \tfrac{d}{dr} w = 0, \qquad \text{où} \quad r = |\xi|.$$

En fixant $\alpha = \frac{n}{2}$, l'équation précédente devient :

$$\frac{d}{dr} \left[r^{n-1} \tfrac{d}{dr} w \right] + \frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left(r^N w \right) = 0 \implies r^{n-1} \tfrac{d}{dr} w + \frac{1}{2} r^N w = A, \quad A \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

pour quelque constante A. Pour que w reste régulier en $r = 0$, on prend $A = 0$. D'où l'équation linéaire

$$w'(r) + \frac{r}{2} w(r) = 0.$$

Divisons par $w(r)$ (non nulle) :

$$\begin{aligned}
\frac{w'(r)}{w(r)} = -\frac{r}{2} &\implies \frac{d}{dr} \big(\ln w(r) \big) = -\frac{r}{2}, \\
&\implies \ln w(r) = -\frac{r^2}{4} + a, \qquad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Donc $w(r) = e^a\, e^{-r^2/4} = C\, e^{-r^2/4}, \quad C = e^a \in \mathbb{R}$.
Ainsi, la fonction auto–semblable est : $F(\xi) = w(|\xi|) = C \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right)$.
Revenant à U, avec $\alpha = N/2$ et $\beta = 1/2$, on obtient :

$$U(x,t) = \frac{C}{t^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

2.2.2 Solution de Gauss avec masse M et analyse dimensionnelle

Définition 2.2.7
Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)(\mathbb{R}^N)$ de masse totale

$$M \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\, dx.$$

La solution fondamentale qui disperse exactement M unités de masse, s'écrit

$$G_M(x,t) \;=\; \frac{M}{(4\pi\, t)^{N/2}} \exp\Big(-\tfrac{|x|^2}{4\,t}\Big),$$

pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^N$.

En utilisant le Lemme 2.2.3, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} G_M(x,t)\, dx = M \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-|x|^2/(4t)}\, dx = M \cdot 1 = M,$$

pour tout $t > 0$, ce qui confirme que la masse totale reste constante.

Dans la suite de ce mémoire, nous noterons $G := U$ comme solution fondamentale de l'équation de la chaleur. Parfois, nous noterons $G_t(x)$ ou $G(t)$ au lieu de $G(x,t)$.

2.3 Représentation intégrale des solutions

Théorème 2.3.1 (Formule de représentation gaussienne) *Soit $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$ une fonction bornée. On définit, pour $x \in \mathbb{R}^N$ et $t > 0$,*

$$\text{(FRG)} \qquad u(x,t) = (G * u_0)(x,t) := (4\pi t)^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy.$$

Alors :

(i) La fonction $u(x,t)$ est une solution classique de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^N \times (0,+\infty[$, avec donnée initiale u_0. De plus, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[)$ et

$$\lim_{(t,x) \longrightarrow (0^+, x_0)} u(x,t) = u_0(x), \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

(ii) Si $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire si u_0 est bornée et uniformément continue, alors la convergence $u(x,t) \longrightarrow u_0(x)$ lorsque $t \longrightarrow 0^+$ est uniforme sur $\mathbb{R}^N$.
Plus loin,

(iii) $\|u(t) - u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \to 0$ quand $t \to 0$.

Preuve.
(i) La fonction

$$(z,t) \longmapsto \frac{1}{t^{N/2}} e^{-\frac{|z|^2}{4t}}$$

est indéfiniment différentiable, avec toutes ses dérivées uniformément bornées sur $\mathbb{R}^N \times [\delta, +\infty[$ pour tout $\delta > 0$. Il s'ensuit d'après les propriétés de la convolution que :

$$u \in C^\infty\big(\mathbb{R}^N \times]0, +\infty[\big).$$

De plus, pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times]0, +\infty[$,

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \big[G_t - \Delta_x G\big](x-y,t)\, u_0(y)\, dy = 0,$$

puisque G vérifie elle-même l'équation de la chaleur.

Par ailleurs, montrons maintenant que la formule (FRG) définit une fonction continue jusqu'en $t = 0$, et égale à u_0 en $t = 0$. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^N$, on décompose :

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^N} G(t,y)\, u_0(x-y)\, dy \\ &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} G(t,y)\, u_0(x_0-y)\, dy}_{I} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} G(t,y)\big[u_0(x-y) - u_0(x_0-y)\big]\, dy}_{II}. \end{aligned}$$

Pour le terme I, on a

$$\lim_{t \downarrow 0} I = u_0(x_0) \quad \text{par le Théorème 2.2.5}$$

Pour II, soit $\delta > 0$. Alors

$$|II| \leqslant \int_{|y| \leqslant \delta} G(t,y)\, |u_0(x-y) - u_0(x_0-y)|\, dy + 2\, \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)(\mathbb{R}^N)} \int_{|y| \geqslant \delta} G(t,y)\, dy,$$

et, par un calcul analogue à celui de la preuve du Théorème 2.2.5, on en déduit que $|II|$ tend vers zéro lorsque $(t,x) \longrightarrow (0,x_0)$.
Ainsi, $u \in C\big([0,+\infty[\times \mathbb{R}^N\big)$ et $u(0,x) = u_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Il en résulte que la fonction $u(x,t)$ est une solution classique de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^N \times (0,+\infty[$, avec donnée initiale u_0 et $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N \times]0,+\infty[)$.

Il reste à montrer que : $\lim_{t \longrightarrow 0^+} u(x,t) = u_0(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Soit $x^0 \in \mathbb{R}^N$ et $\varepsilon > 0$. Choisissons $\delta > 0$ tel que

$$|u(y) - u(x^0)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |y - x^0| < \delta. \tag{2.8}$$

Alors, pour $|x - x^0| < \frac{\delta}{2}$, on a

$$|u(x,t) - u(x^0)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} G(x-y,t) \left[u(y) - u(x^0) \right] dy \right| \leqslant I + J,$$

avec

$$I = \int_{B(x^0,\delta)} G(x-y,t)\, |u(y) - u(x^0)|\, dy, \quad J = \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(x^0,\delta)} G(x-y,t)\, |u(y) - u(x^0)|\, dy.$$

D'après (2.8), on obtient

$$I \leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} U(x-y,t)\, dy = \varepsilon.$$

Par ailleurs, si $|x - x^0| \leqslant \frac{\delta}{2}$ et $|y - x^0| \geqslant \delta$, alors

$$|x - y| \geqslant |y - x^0| - |x - x^0| \geqslant \delta - \tfrac{\delta}{2} = \tfrac{\delta}{2}.$$

D'où, avec $\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ la norme essentielle supérieure de g,

$$J \leqslant 2\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{|x-y| \geqslant \delta/2} G(x-y,t)\, dy = 2\|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{|z| \geqslant \delta/2} G(z,t)\, dz.$$

En coordonnées sphériques,

$$\int_{|z| \geqslant \delta/2} G(z,t)\, dz \;\leqslant\; \frac{C}{t^{N/2}} \int_{r \geqslant \delta/2} e^{-\frac{r^2}{4t}}\, r^{n-1}\, dr \;=\; \frac{C}{t^{N/2}} \int_{\delta^2/(16t)}^{+\infty} e^{-s} s^{\frac{n}{2}-1}\, ds \;\longrightarrow\; 0 \quad (t \longrightarrow 0^+).$$

Par conséquent $J \longrightarrow 0$. On en déduit que, pour $|x - x^0| < \delta/2$ et $t > 0$ assez petit,

$$|u(x,t) - u(x^0)| \leqslant I + J < 2\varepsilon.$$

Cela prouve que $u(x,t) \longrightarrow u(x^0)$ lorsque $t \longrightarrow 0^+$, uniformément pour $|x - x^0| < \delta/2$.

(ii) Supposons $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire u_0 est bornée et uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Par uniformité de la continuité, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|u_0(x-y) - u_0(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dès que} \quad |y| < \delta,\ \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

On écrit l'écart :

$$|u(x,t) - u_0(x)| \;=\; \left| \int_{\mathbb{R}^N} G_t(y)\, (u_0(x-y) - u_0(x))\, dy \right| \;\leqslant\; I_1 + I_2,$$

avec

$$I_1 \;=\; \int_{|y|<\delta} G_t(y)\, |u_0(x-y) - u_0(x)|\, dy, \quad I_2 \;=\; \int_{|y| \geqslant \delta} G_t(y)\, |u_0(x-y) - u_0(x)|\, dy.$$

Dès que $|y| < \delta$, on a $|u_0(x-y) - u_0(x)| < \varepsilon/2$. Puisque G_t est une densité (d'intégrale 1),

$$I_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}^N} G_t(y)\, dy = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme u_0 est bornée, il existe $M = \|u_0\|_\infty$ tel que

$$|u_0(x-y) - u_0(x)| \leqslant 2M.$$

D'autre part, la fonction gaussienne $G_t(y)$ se "concentre" autour de 0 quand $t \longrightarrow 0$, ce qui implique :

$$\int_{|y|\geqslant\delta} G_t(y)\, dy \xrightarrow{t\longrightarrow 0} 0.$$

Par conséquent, pour t suffisamment petit,

$$I_2 \leqslant 2M \cdot \int_{|y|\geqslant\delta} G_t(y)\, dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En combinant les estimations :

$$|u(x,t) - u_0(x)| \leqslant I_1 + I_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$$

D'où :

$$\lim_{t\longrightarrow 0^+} \|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0 \text{ i.e. } u(x,t) \longrightarrow u_0(x) \text{ uniformément en } x.$$

(iii) Examinons d'abord le cas où $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Pour le cas général, on utilisera le fait que tout élément de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$ est limite d'une suite d'élement de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

1er**cas :** $u_0 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Supposons que $\mathrm{supp}(u_0) \subset B_R(0),\ R > 0$

$$\begin{aligned} \|u(t) - u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} |u(t,x) - u_0(x)|\, dx \\ &= \int_{B_R(0)} |u(t,x) - u_0(x)|\, dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} |u(t,x)|\, dx \end{aligned}$$

Pour $x \in B_R(0)$,

$$\begin{aligned} |u(t,x) - u_0(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} G(t,x-y)u_0(y)dy - u_0(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} G(t,x-y)u_0(y)dy - \int_{\mathbb{R}^N} G(t,x-y)u_0(x)dy \right| \\ &\leqslant \underbrace{\int_{B_R(0)} G(t,x-y)\,|u_0(y) - u_0(x)|\, dy}_{(I)} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} G(t,x-y)\,|-u_0(x)|\, dy}_{(II)} \end{aligned}$$

-Estimation de (I)

Soit $\varepsilon > 0$. u_0 est continue sur $B_R(0)$ qui est compacte alors u_0 est uniformément continue sur $B_R(0)$. Ainsi $\exists \delta > 0$, tel que

$$\forall x, y \in B_R(0),\ |y - x| < \delta \implies |u_0(y) - u_0(x)| < \varepsilon$$

On cherche à estimer

$$\begin{aligned}\int_{B_R(0)} G(t, x-y)\,|u_0(y) - u_0(x)|\,dy &\leqslant \int_{B_R(0)\cap B_\delta(x)} G(t, x-y)\,|u_0(y) - u_0(x)|\,dy + \\ &\quad \int_{B_R(0)\setminus B_\delta(x)} G(t, x-y)\,|u_0(y) - u_0(x)|\,dy\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\int_{B_R(0)\cap B_\delta(x)} G(t, x-y)\,|u_0(y) - u_0(x)|\,dy &\leqslant \varepsilon \int_{B_R(0)\cap B_\delta(x)} G(t, x-y)dy \\ &\leqslant \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} G(t, x-y)dy \;=\; \varepsilon\end{aligned}$$

Et

$$\int_{B_R(0)\setminus B_\delta(x)} G(t, x-y)\,|u_0(y) - u_0(x)|\,dy \leqslant 2\|u_0\|_{\mathrm{L}^\infty(B_R(0))} \int_{B_R(0)\setminus B_\delta(x)} G(t, x-y)dy$$

-Estimation de (II)

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} G(t, x-y)\,|-u_0(x)|\,dy \leqslant \|u_0\|_{\mathrm{L}^\infty(B_R(0))} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} G(t, x-y)dy$$

-Estimation de $\|u(t) - u_0\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N)}$

$$\begin{aligned}\|u(t) - u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} &\leqslant \varepsilon \int_{B_R(0)} dx + 2\|u_0\|_{\mathrm{L}^\infty(B_R(0))} \int_{B_R(0)} \int_{B_R(0)\setminus B_\delta(x)} G(t, x-y)dydx \\ &\quad + \|u_0\|_{\mathrm{L}^\infty(B_R(0))} \int_{B_R(0)} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} G(t, x-y)dydx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} |u(t,x)|\,dx\end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} |u(t,x)|\,dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} \int_{\mathbb{R}^N} |G(t, x-y)u_0(y)|\,dydx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} \int_{B_R(0)} |G(t, x-y)u_0(y)|\,dydx \\ &\leqslant \|u_0\|_{\mathrm{L}^\infty(B_R(0))} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} \int_{B_R(0)} G(t, x-y)dydx\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\|u(t)-u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} &\leqslant \varepsilon\int_{B_R(0)}dx+2\|u_0\|_{\mathrm{L}^\infty(B_R(0))}\int_{B_R(0)}\int_{B_R(0)\setminus B_\delta(x)}G(t,x-y)dydx\\ &\quad+2\|u_0\|_{\mathrm{L}^\infty(B_R(0))}\int_{B_R(0)}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)}G(t,x-y)dydx \quad (\text{ Fubini})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{B_R(0)}\int_{B_R(0)\setminus B_\delta(x)}G(t,x-y)dydx &\leqslant \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\int_{B_R(0)}\int_{B_R(0)\setminus B_\delta(x)}\exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right)dydx\\ &\leqslant \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\int_{B_R(0)}\int_{B_R(0)\setminus B_\delta(x)}\exp\left(-\frac{\delta^2}{4t}\right)dydx\\ &\quad(\text{car } y\in B_R(0)\setminus B_\delta(x)\implies |x-y|\geqslant\delta)\\ &\leqslant \left[\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\exp\left(-\frac{\delta^2}{4t}\right)\int_{B_R(0)}\int_{B_R(0)\setminus B_\delta(x)}dydx\right]\underset{t\longrightarrow 0}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\lim_{t\longrightarrow 0}G(t,x-y)=0,\ \forall x\neq y$$

Par le théorème de convergence dominé, on a :

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\int_{B_R(0)}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)}G(t,x-y)dydx=0$$

Alors

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\|u(t)-u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}\leqslant\varepsilon\int_{B_R(0)}dx$$

Comme ε est quelconque (on peut faire tendre $\epsilon\longrightarrow 0$), on conclut que :

$$\lim_{t\longrightarrow 0}\|u(t)-u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}=0$$

Cas général : $u_0\in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)$.
Compte tenu de la densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ (voir § section 1.1.3), il vient que :

$$u_0\in\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)\implies\exists\,\{g_n\}\subset\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)/\ g_n\longrightarrow u_0\ (\text{au sens }\ \mathrm{L}^1)$$

$$\|u(t)-u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}\leqslant\|u(t)-G(t)*g_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}+\|G(t)*g_n-g_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}+\|g_n-u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}$$

Or

$$\begin{aligned}\|u(t)-G(t)*g_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\left|u(t,x)-\int_{\mathbb{R}^N}G(t,x-y)g_n(y)dy\right|dx\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_{\mathbb{R}^N}G(t,x-y)u_0(y)dy-\int_{\mathbb{R}^N}G(t,x-y)g_n(y)dy\right|dx\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\left|\int_{\mathbb{R}^N}G(t,x-y)\left(u_0(y)-g_n(y)\right)dy\right|dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_{\mathbb{R}^N} G(t,x-y)\,|u_0(y)-g_n(y)|\,dy\right)dx\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}|u_0(y)-g_n(y)|\left(\int_{\mathbb{R}^N} G(t,x-y)dx\right)dy \qquad \text{(Fubini)}\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^N}|u_0(y)-g_n(y)|\,dy\\
&\leqslant \|u_0-g_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

Alors

$$\|u(t)-u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|G*g_n-g_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}+2\|g_n-u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}$$

Comme $g_n\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, alors $\|G*g_n-g_n\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}\longrightarrow 0$ quand $t\longrightarrow 0$.
Par suite

$$\|u(t)-u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} \leqslant 2\|g_n-u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}$$

En faisant tendre $n\longrightarrow+\infty$, on conclut que $\|u(t)-u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}\to 0$ quand $t\to 0$.

■

Nous allons à présent prouver l'existence et l'unicité du problème de cauchy lié à l'équation de la chaleur.

2.4 Principe du maximum faible et unicité

L'objectif de cette est celui de prouver l'existence et l'unicité des problèmes à valeurs initiales dans un ouvert borné.

2.4.1 Cylindres paraboliques et principe du maximum faible

On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et $T>0$. On considère le cylindre parabolique :

$$\Omega_T=\Omega\times(0,T]:=\{(x,t)\mid x\in\Omega,\ t\in(0,T]\}.$$

On définit la frontière parabolique de Ω_T par

$$\partial'\Omega_T:=\overline{\Omega}_T\backslash\Omega_T,$$

c'est-à-dire

$$\partial'\Omega_T:=(\partial\Omega\times[0,T])\cup(\Omega\times\{t=0\}).$$

Théorème 2.4.1 (Principe du maximum faible | C.f [3]) *Soit* $u\in\mathcal{C}^{2,1}(\Omega_T)\cap\mathcal{C}(\overline{\Omega}_T)$ *telle que*

$$\partial_t u-\Delta u\leqslant 0 \quad \textit{dans } \Omega_T.$$

(Dans ce cas, on dit que u est une sous-solution de l'équation de la chaleur.) Alors

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\partial'\Omega_T} u.$$

• **NB.** Le **principe du maximum faible** implique l'unicité de la solution du problème de Dirichlet parabolique sur un domaine borné avec des conditions initiales et au bord.

Preuve. Considérons pour tout $\varepsilon > 0$ la fonction

$$v = u - \varepsilon t.$$

On a alors

$$\partial_t v - \Delta v = \partial_t u - \Delta u - \varepsilon \leqslant -\varepsilon < 0 \quad \text{dans } \Omega_T.$$

Supposons que v atteint son maximum en un point $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega}_T$. Supposons par l'absurde que ce maximum soit atteint à l'intérieur, c'est-à-dire $(x_0, t_0) \in \Omega_T$. Alors, puisque $t_0 \in (0, T]$ et $x_0 \in \Omega$, on a aux points de maximum que

$$\Delta v(x_0, t_0) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad \partial_t v(x_0, t_0) \geqslant 0,$$

ce qui implique

$$\partial_t v(x_0, t_0) - \Delta v(x_0, t_0) \geqslant 0,$$

ce qui contredit

$$\partial_t v - \Delta v < 0 \quad \text{dans } \Omega_T.$$

Ainsi, le maximum de v est nécessairement atteint sur la frontière parabolique $\partial'\Omega_T$, c'est-à-dire

$$\max_{\overline{\Omega}_T} v = \max_{\partial'\Omega_T} v \leqslant \max_{\partial'\Omega_T} u.$$

On en déduit que

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u \leqslant \max_{\overline{\Omega}_T} (v + \varepsilon t) \leqslant \max_{\overline{\Omega}_T} v + \varepsilon T = \max_{\partial'\Omega_T} v + \varepsilon T \leqslant \max_{\partial'\Omega_T} u + \varepsilon T.$$

En faisant tendre $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, on obtient

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u \leqslant \max_{\partial'\Omega_T} u.$$

L'inégalité inverse est évidente, d'où l'égalité.

De façon analogue, le principe du minimum faible s'applique aux sur-solutions satisfaisant

$$\partial_t u - \Delta u \geqslant 0 \quad \text{dans } \Omega_T.$$

■

L'unicité pour le problème de Cauchy sur $\mathbb{R}^N$ nécessite une version globale du principe du maximum.

2.4.2 Principe du maximum pour les problèmes de Cauchy

On étend à présent le principe du maximum à la région $\mathbb{R}^N \times (0, T]$.

Théorème 2.4.2 (Principe du maximum faible sur $\mathbb{R}^N$ | C.f [3]) *Soit $u \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R}^N \times (0,T]) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^N \times [0,T])$ telle que*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u \leqslant 0, & \text{dans } \mathbb{R}^N \times (0,T], \\ u(x,t) \leqslant A e^{a|x|^2}, & \text{pour } (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,T], \\ u(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

avec des constantes $A, a > 0$. Alors

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]} u(x,t) \;=\; \sup_{z\in\mathbb{R}^N} g(z).$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons énoncer les deux lemmes suivants :

Lemme 2.4.3 (Fonction barrière fondamentale)
Pour tout $y \in \mathbb{R}^N$, $\mu > 0$ et $\varepsilon > 0$, définissons

$$w(x,t) := \mu\,(T+\varepsilon-t)^{-N/2} \exp\Big(\tfrac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}\Big).$$

Alors w est solution exacte de l'équation de la chaleur :

$$\partial_t w = \Delta w.$$

Preuve. On pose $\tau = T + \varepsilon - t$ et $W(x,\tau) = \tau^{-N/2} \exp\big(\tfrac{|x-y|^2}{4\tau}\big)$. On calcule

$$\nabla_x W = W\,\frac{x-y}{2\tau}, \quad \Delta_x W = W\Big(\frac{N}{2\tau} + \frac{|x-y|^2}{4\tau^2}\Big),$$

et

$$\partial_\tau W = W\Big(-\frac{N}{2\tau} - \frac{|x-y|^2}{4\tau^2}\Big) = -\Delta_x W.$$

Or $\partial_t W = -\partial_\tau W$, d'où $\partial_t W = \Delta_x W$. Ainsi w vérifie bien $\partial_t w = \Delta w$.

Lemme 2.4.4 (Principe du maximum parabolique, version locale | Théorème 2.4.1)
Soit v une fonction continue sur $\overline{\Omega_T} = \overline{\Omega} \times [0,T]$ et $\mathcal{C}^{2,1}$ sur Ω_T, vérifiant

$$\partial_t v - \Delta v \leqslant 0 \quad \text{dans } \Omega_T,$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un domaine borné. Alors

$$\sup_{\Omega_T} v \leqslant \sup_{\partial'\Omega_T} v,$$

où $\partial'\Omega_T = (\partial\Omega \times [0,T]) \cup (\Omega \times \{0\})$ est la frontière parabolique.

Preuve.[Voir la preuve du théorème 2.4.1] C'est le principe classique du maximum faible pour les sous-solutions de l'équation de la chaleur.

Preuve.[Preuve du théorème 2.4.2]

Étape 1 : Cas $4aT < 1$. On fixe $\varepsilon > 0$ tel que $4a(T+\varepsilon) < 1$, et l'on considère

$$v(x,t) := u(x,t) - w(x,t), \qquad w \text{ défini au lemme précédent.}$$

Alors $\partial_t v - \Delta v \leqslant 0$ dans $\mathbb{R}^N \times (0,T]$.

Fixons $y \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$, et notons $\Omega = B(y,r)$. Par le lemme du maximum parabolique, on a

$$v(y,t) \leqslant \max_{\partial'\Omega_T} v, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

- Sur $t = 0$, $v(x,0) = g(x) - w(x,0) \leqslant g(x) \leqslant \sup g$.

- Sur $x \in \partial\Omega$, $v(x,t) \leqslant Ae^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a+G))^{N/2} e^{(a+G)r^2}$, où $1/(4(T+\varepsilon)) = a+G$ avec $G > 0$.

Pour r grand, ce terme $\longrightarrow -\infty$, donc pour r assez grand, $v(x,t) \leqslant \sup g$.
Ainsi $\max_{\partial'\Omega_T} v \leqslant \sup g$, et donc

$$u(y,t) \leqslant \sup g + \mu\,(T+\varepsilon-t)^{-N/2}.$$

En laissant $\mu \longrightarrow 0^+$, on conclut que $u(y,t) \leqslant \sup g$ pour tout (y,t).

Étape 2 : Cas général $4aT \geqslant 1$. On découpe $[0,T]$ en intervalles de longueur T_1 avec $4aT_1 < 1$ (par ex. $T_1 = \frac{1}{8a}$). On applique l'Étape 1 sur chaque intervalle et on itère : la borne $\sup g$ est préservée jusqu'à T.

Ainsi, dans tous les cas,

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\times[0,T]} u(x,t) = \sup_{z\in\mathbb{R}^N} g(z).$$

■

2.5 Unicité pour le problème de Cauchy de l'équation de la chaleur

Théorème 2.5.1 (Unicité pour l'équation de la chaleur) *Soit $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N)$, $T > 0$. Alors il existe au plus une solution au problème*

$$(PC) \ : \ \begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & (0,T] \times \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u_0, \end{cases}$$

qui satisfait l'estimation

$$(*) \qquad |u(t,x)| \leqslant A\, e^{a|x|^2}, \quad 0 < t \leqslant T, \ x \in \mathbb{R}^N,$$

avec $A, a > 0$.

Remarque 1
Si $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ alors $u(t,x) = G(t) * u_0$ est une solution. Or

$$\|G * u_0\|_\infty \leqslant \|G\|_1 \, \|u_0\|_\infty.$$

Ce qui implique que

$$|u(t,x)| \leqslant \|u_0\|_\infty \, \|G(t)\|_1 = \|u_0\|_\infty$$

Donc, pour $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ on a à la fois existence et unicité.

Preuve.

Si u_1 et u_2 sont deux solutions, posons $w_+ = u_1 - u_2$. Alors w_+ est solution du (PC). En effet, si u_1 et u_2 satisfont $(*)$ alors il existent $A, B, a, b > 0$, tel que :

$$|u_1(t,x)| \leqslant Ae^{a|x|^2} \quad \text{et } |u_2(t,x)| \leqslant Be^{b|x|^2}$$

On a :

$$\begin{aligned} |w_+| &\leqslant |u_1| + ||u_2| \\ &\leqslant \left| Ae^{a|x|^2} | + | Be^{b|x|^2} \right| \\ &\leqslant (A+B) e^{\max\{a,b\}|x|^2} \end{aligned}$$

Alors w_+ satisfait $(*)$.
Ce qui implique que :

$$\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^N} w_+ = \sup w_{+_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad w_+ \leqslant 0.$$

On fait la même chose avec $w_- = u_2 - u_1$ et on obtient que $w_- \leqslant 0$.
Et donc $w = 0$. Ainsi $u_1 = u_2$.

■

2.6 Régularité des solutions

Théorème 2.6.1 (Régularité | C.f [3]) *Supposons que $u \in \mathcal{C}^{2,1}(\Omega_T)$ soit une solution de l'équation de la chaleur dans Ω_T. Alors*

$$u \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega_T).$$

Preuve. 1. Considérons le cylindre circulaire fermé

$$C(x,t;r) = \{(y,s) \mid |y-x| \leqslant r, \quad t - r^2 \leqslant s \leqslant t\}.$$

Fixons $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ et choisissons $r > 0$ suffisamment petit pour que

$$C := C(x_0,t_0;r) \subset \Omega_T.$$

Considérons deux petits cylindres circulaires imbriqués

$$C' := C\left(x_0,t_0;\frac{3}{4}r\right), \quad C'' := C\left(x_0,t_0;\frac{1}{2}r\right).$$

Soit $\zeta(x,t) \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R})$ telle que $\zeta \equiv 0$ en dehors de C, $\zeta \equiv 1$ sur C', et $0 \leqslant \zeta \leqslant 1$ partout.

2. On suppose provisoirement que $u \in \mathcal{C}^{\infty}(C)$. Cela semble contradictoire avec ce que nous devons prouver, mais l'argument suivant vise à établir une identité qui est valide pour les solutions $\mathcal{C}^{2,1}$ une fois qu'elle est démontrée pour les solutions $\mathcal{C}^{\infty}$ de l'équation de la chaleur. Soit

$$v(x,t) = \zeta(x,t)u(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times [0,t_0].$$

Alors $v \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^N \times (0,t_0])$ et $v = 0$ sur $\mathbb{R}^N \times \{t = 0\}$. De plus,

$$\partial_t v - \Delta v = \zeta_t u - 2\nabla\zeta \cdot \nabla u - u\Delta\zeta := \tilde{f}$$

dans $\mathbb{R}^N \times (0,t_0)$. On remarque que $\tilde{f}$ est $\mathcal{C}^{\infty}$ et à support compact dans $\mathbb{R}^N \times [0,++\infty[$; de plus v est bornée sur $\mathbb{R}^N \times [0,T]$. Par unicité et d'après le théorème 3.3, on a

$$v(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(x-y,t-s)\tilde{f}(y,s)\,dy\,ds, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,t_0).$$

Soit $(x,t) \in C''$. Alors

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \iint_C \Phi(x-y,t-s)\tilde{f}(y,s)\,dy\,ds \\ &= \iint_C \Phi(x-y,t-s)\big[(\zeta_s-\Delta\zeta)u(y,s)-2\nabla\zeta\cdot\nabla u\big]dy\,ds \\ &= \iint_C \big[\Phi(x-y,t-s)(\zeta_s+\Delta\zeta)+2\nabla_y\Phi(x-y,t-s)\cdot\nabla\zeta\big]u(y,s)\,dy\,ds \\ &= \iint_{C\setminus C'} \big[\Phi(x-y,t-s)(\zeta_s+\Delta\zeta)+2\nabla_y\Phi(x-y,t-s)\cdot\nabla\zeta\big]u(y,s)\,dy\,ds, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$G(x,y,t,s) := \Phi(x-y,t-s)(\zeta_s+\Delta\zeta)(y,s)+2\nabla_y\Phi(x-y,t-s)\cdot\nabla\zeta(y,s).$$

Ainsi, on obtient

$$u(x,t) = \iint_{C\setminus C'} G(x,y,t,s)u(y,s)\,dy\,ds, \quad (x,t)\in C''. \tag{2.9}$$

3. Nous avons établi la formule (2.9) pour une solution $u \in \mathcal{C}^\infty$ de l'équation de la chaleur dans Ω_T. Si u est une solution $\mathcal{C}^{2,1}$, considérons la régularisation $u_\varepsilon = \eta_\varepsilon * u$ par convolution mollifiante. Alors u_ε est une solution $\mathcal{C}^\infty$ de l'équation de la chaleur dans $(\Omega_T)_\varepsilon$ et la formule (2.9) est vérifiée pour u_ε. En faisant tendre $\varepsilon \longrightarrow 0$, on déduit que (2.9) est aussi valide pour u dans C''. Comme G est $\mathcal{C}^\infty$ en $(x,t) \in C''$ et $(y,s) \in C\setminus C'$, la formule prouve que $u \in \mathcal{C}^\infty(C'')$.

■

Passons maintenant à quelques estimations sur les dérivées des solutions de l'équation de la chaleur.

Théorème 2.6.2 (Estimations sur les dérivées | C.f [3]) *Il existe une constante $C_{k,\ell}$ pour $k,\ell = 0,1,2,\ldots$, telle que*

$$\max_{C(x,t;r/2)} |D_x^\alpha \partial_t^\ell u| \leqslant C_{k,\ell}\frac{1}{r^{k+2\ell+n+2}}\|u\|_{L^1(C(x,t;r))} \quad \text{pour } |\alpha| = k,$$

pour tout cylindre $C(x,t;r/2) \subset C(x,t;r) \subset \Omega_T$ et toute solution $u \in \mathcal{C}^{2,1}(\Omega_T)$ de l'équation de la chaleur dans Ω_T.

Preuve. 1. Fixons un point $(x,t) \in \Omega_T$. En effectuant un changement de variables, on peut supposer que ce point est $(0,0)$. Supposons d'abord que le cylindre

$$C(1) := C(0,0;1) \subset \Omega_T,$$

et posons

$$C\left(\frac{3}{4}\right) := C\left(0,0;\frac{3}{4}\right), \quad C\left(\frac{1}{2}\right) := C\left(0,0;\frac{1}{2}\right).$$

Alors, d'après la formule (2.9) du théorème précédent,

$$u(x,t) = \iint\limits_{C(1)\setminus C(3/4)} G(x,y,t,s)u(y,s)\,dy\,ds, \quad (x,t) \in C(1/2).$$

En dérivant sous l'intégrale, on obtient que pour tout $k, \ell = 0, 1, 2, \ldots$ et tout multi-indice α avec $|\alpha| = k$,

$$|D_x^\alpha \partial_t^\ell u(x,t)| \leqslant \iint\limits_{C(1)\setminus C(3/4)} |D_x^\alpha \partial_t^\ell G(x,y,t,s)||u(y,s)|\,dy\,ds \leqslant C_{k,\ell}\|u\|_{L^1(C(1))}, \tag{2.10}$$

pour une constante $C_{k,\ell}$ convenable.

2. Maintenant, supposons que

$$C(r) := C(0,0;r) \subset \Omega_T,$$

et posons

$$C(r/2) := C(0,0;r/2).$$

Soit u une solution de l'équation de la chaleur dans Ω_T. On effectue le changement d'échelle

$$v(x,t) := u(rx, r^2t), \quad (x,t) \in C(1).$$

Alors

$$\partial_t v - \Delta v = 0 \quad \text{dans } C(1).$$

On remarque que pour tout $|\alpha| = k$,

$$D_x^\alpha \partial_t^\ell v(x,t) = r^{2\ell+k} D_y^\alpha \partial_s^\ell u(rx, r^2t),$$

et

$$\|v\|_{L^1(C(1))} = \frac{1}{r^{n+2}}\|u\|_{L^1(C(r))}.$$

En appliquant (2.10) à v, on obtient

$$|D_y^\alpha \partial_s^\ell u(y,s)| \leqslant C_{k,\ell}\frac{1}{r^{2\ell+k+n+2}}\|u\|_{L^1(C(r))}, \quad (y,s) \in C(r/2).$$

Cela complète la preuve.

2.7 Le semi-groupe de la chaleur

Problème de Cauchy

Soit X un espace de Banach. On introduit les opérateurs linéaires $(S_t)_{t\geqslant 0}$ définis par :

$$\text{(2.11)} \qquad \begin{cases} S(0)u_0 &= u_0 \\ S(t)u_0 &= G(\cdot,t) \star u_0\,, \quad t>0 \end{cases}$$

$$S_t : \begin{array}{ccc} X & \longmapsto & X \\ u_0 & \longmapsto & u(\cdot,t) \end{array}$$

où u est solution de l'équation de la chaleur avec donnée initiale u_0.

$$S_t u_0(x) := u(x,t) = (G_t * u_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} G_t(x-y)u_0(y)\,dy \quad \text{avec} \quad G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Théorème 2.7.1 *Soit $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ pour $p \in [1,+\infty[$. Alors $u \in C^\infty\left(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^N\right)$ est solution classique de l'équation de la chaleur sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}^N$ et satisfait :*

(I) $$\lim_{t\longrightarrow 0} u(x,t) = u_0(x) \quad \textit{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^N$$

La condition initiale sera donc satisfaite au sens d'une limite presque partout au sens de (I).

Théorème 2.7.2 *$(S_t)_{t\geqslant 0}$ définit un semi-groupe fortement continu de contractions sur chacun des espaces de Banach suivants :*

(a) $X = \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$,

(b) $L^p(\mathbb{R}^N)$, $\quad 1 < p < \infty$

Remarque 2
Pour $p = \infty$, on a que les points (i), (ii) et (iii) sont toujours vérifiés, mais que le point (iv) (d'après la définition 1.5.2 du Chapitre 1) n'est plus vrai

Preuve. Il s'agira de vérifier si les conditions de la définition 1.5.2 du Chapitre 1 sont vérifiées.

La preuve du point (i) provient de la définition 2.11.

Cas (a)

(ii) On a $G_t * G_s = G_{t+s}$, donc $S_t S_s = S_{t+s}$.

(iii) Soit $u_0 \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$. Alors on a

$$\begin{aligned}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\big|(S(t)u_0-u_0)(x)\big| &\leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} G_S(y)\,\big|u_0(x-y)-u_0(x)\big|\,dy\\ &= \sup_{x\in\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} G_1(v)\,\big|u_0\big(x-\sqrt{t}\,v\big)-u_0(x)\big|\,dv\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} G_1(v)\,\sup_{x\in\mathbb{R}^N}\big|u_0\big(x-\sqrt{t}\,v\big)-u_0(x)\big|\,dv.\end{aligned}$$

La fonction

$$\varphi(t,v) := \sup_{x\in\mathbb{R}^N}\big|u_0\big(x-\sqrt{t}\,v\big)-u_0(x)\big|$$

tend vers zéro lorsque $t \longrightarrow 0^+$ pour chaque v, grâce à la continuité uniforme de u_0, et elle est majorée par $2\|u_0\|_\infty$. Par le théorème de convergence dominée, $S(t)u_0 - u_0$ tend vers 0 lorsque $t \longrightarrow 0^+$ dans la norme du sup.

(iv) Si $u_0 \in \mathrm{BUC}(\mathbb{R}^N)$, alors $|S_t u_0(x)| \leqslant \|u_0\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} G_t(y)\,dy = \|u_0\|_\infty$. Donc $\|S_t u_0\|_\infty \leqslant \|u_0\|_\infty$. Par suite $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(BUC(\mathbb{R}^N))} \leqslant 1$

Cas (b)

(ii) Si $t = 0$ ou $s = 0$, le résultat est immédiat en utilisant que $S(0) = \mathrm{Id}$. On suppose maintenant $t, s > 0$. On rappelle que la transformée de Fourier de la Gaussienne est :

$$\mathcal{F}\big(x \mapsto (4\pi)^{-N/2}e^{-|x|^2/4}\big)(\xi) = e^{-|\xi|^2},\ \text{c'est-à-dire}\ \widehat{G}(1,\cdot)(\xi) = e^{-|\xi|^2}$$

Si f est une fonction et $f_\lambda = f(\frac{x}{\lambda})$, alors $\mathcal{F}f_\lambda(\xi) = \lambda^N\,\mathcal{F}f(\lambda\xi)$ puisque

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f\big(x/\lambda\big)\,dx = \lambda^N \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\langle x,\lambda\xi\rangle} u_0(x)\,dx.$$

Comme

$$G(t,x) = t^{-N/2} G\left(1, \tfrac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

on en déduit donc que

$$\widehat{G}(t,\cdot)(\xi) = e^{-t|\xi|^2}$$

(Ceci n'est qu'un petit rappel de la transformée de Fourrier de la Gaussienne déjà vu dans la preuve de (SFG))

Comme $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$, on en déduit

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\big(G(t,\cdot) * G(s,\cdot)\big)(\xi) &= e^{-t|\xi|^2}\,e^{-s|\xi|^2}\\ &= e^{-(t+s)|\xi|^2}\\ &= \widehat{G}(t+s,\cdot)(\xi).\end{aligned}$$

Donc par injectivité de la transformée de Fourier :

$$G(t,\cdot) * G(s,\cdot) = G(t+s,\cdot).$$

Enfin, comme $(u * v) * w = u * (v * w)$, on obtient

$$\begin{aligned} S(t+s)u_0 &= G(t+s,\cdot) * u_0 \\ &= G(t,\cdot) * \big(G(s,\cdot) * u_0\big) \\ &= S(t)\big(S(s)u_0\big). \end{aligned}$$

(iii) Soit $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Nous voulons prouver que la trajectoire initiale est continue, c'est à dire :

$$\|S(t)u_0 - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \;\to\; 0 \quad \text{lorsque } t \longrightarrow 0. \tag{2.12}$$

En effet :

Soit donc $\varepsilon > 0$. Par densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, il existe $v_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec $v_0(x) = 0$ pour $|x| \geqslant R$ telle que :

$$\|v_0 - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{3}.$$

Alors par l'inégalité triangulaire et le point (iv), on obtient :

$$\begin{aligned} \|S(t)u_0 - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leqslant \|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|v_0 - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|S(t)v_0 - v_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leqslant 2\|v_0 - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|S(t)v_0 - v_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\leqslant \tfrac{2\varepsilon}{3} + \|S(t)v_0 - v_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 2.3.1, $(S(t)v_0 - v_0)(x) \to 0$ lorsque $t \longrightarrow 0$ en tout point $x \in \mathbb{R}^N$. Grace aux inégalités de Young et au Lemme 2.2.3, on a :

$$\|S(t)v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$$

Il vient donc par convergence dominée que :

$$\|S(t)v_0 - v_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)(B(0,2R))} \;\longrightarrow\; 0 \quad \text{lorsque } t \longrightarrow 0$$

Pour $|x| \geqslant 2R$, en utilisant le support de v_0, on a

$$\begin{aligned} |S(t)v_0(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} G(t, x-y)\, v_0(y)\, dy\right| \\ &= \left|\int_{|y|\leqslant R} G(t, x-y)\, v_0(y)\, dy\right| \\ &\leqslant \sup_{|y|\leqslant R} |G(t, x-y)| \int_{|y|\leqslant R} |v_0(y)|\, dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{(|x|-R)^2}{4t}} \int_{|y|\leqslant R} |v_0(y)|\, dy. \end{aligned}$$

Notons que $e^{-\frac{(|x|-R)^2}{4t}} \leqslant e^{-\frac{|x|^2}{8t}}$ car $R \leqslant \frac{|x|}{2}$. De plus, il existe $C > 0$ telle que $e^{-z^2/8} \leqslant$

Cz^{-2n} pour tout $z > 0$. En combinant, on obtient

$$e^{-\frac{(|x|-R)^2}{4t}} \leqslant C\,\frac{t^N}{|x|^{2n}}.$$

L'inégalité ci-dessus devient alors

$$|S(t)v_0(x)| \leqslant C'\,\frac{t^{N/2}}{|x|^{2n}} \quad \text{pour } C' = C(4\pi)^{-N/2}\int_{|y|\leqslant R}|v_0(y)|\,dy < \infty.$$

En utilisant cela et que $v_0(x) = 0$ pour $|x| \geqslant R$, on obtient

$$\|S(t)v_0 - v_0\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)(\mathbb{R}^N\setminus B(0,2R))} \;\leqslant\; C'^p\,t^{np/2}\int_{|x|\geqslant 2R}\frac{dx}{|x|^{2np}} \;\longrightarrow\; 0 \quad \text{lorsque } t\downarrow 0.$$

En combinant les convergences dans $B(0,2R)$ et dans $\mathbb{R}^N\setminus B(0,2R)$, on obtient qu'il existe $t_0 > 0$ tel que

$$\|S(t)v_0 - v_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } 0 < t \leqslant t_0.$$

En injectant cette inégalité dans $\|S(t)u_0 - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ on obtient que

$$\|S(t)u_0 - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant \varepsilon.$$

On vient de montrer que :

$$\|S(t)u_0 - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \;\to\; 0 \quad \text{lorsque } t \longrightarrow 0.$$

. Soient maintenant $t, s \geqslant 0$. Alors en utilisant successivement (iii) et (iv) on a

$$\begin{aligned}\|S(t+s)u_0 - S(t)u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \|S(t)\big(S(s)u_0 - u_0\big)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\ &\leqslant \|S(s)u_0 - u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

De 2.12, on déduit donc que $\|S(t+s)u_0 - S(t)u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0$ lorsque $s \longrightarrow 0$ et ce uniformément pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(iv) Par l'inégalité de Young pour la convolution :

$$\begin{aligned}\|S_t u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &= \|G_t * u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\\ &\leqslant \|G_t\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

■

Nous allons maintenant définir ce qu'est un problème de Cauchy bien posé, notion introduite par Hadamard. Pour cela, les solutions doivent exister, être uniques et dépendre continûment de la donnée initiale.

Définition 2.7.3 ((PC) linéaire est bien posé dans un espace de Banach)
Un (PC) linéaire est bien posé dans un espace de Banach X (avec un espace auxiliaire Y), si

pour tout $u_0 \in X$, il existe une unique solution $u(t) \in C([0,+\infty[, X) \cap Y$, et que pour tout $T > 0$, l'application

$$u_0 \longmapsto u(\cdot) \ : \ X \longrightarrow C([0,T], X)$$

est continue.

Proposition 2.7.4
Soit

$$Y = \left\{ u \in C^\infty\big(]0,+\infty[\times\mathbb{R}^N\big) \ \middle| \ u \text{ bornée sur } [t_0,+\infty[\times\mathbb{R}^N, \ \forall t_0 > 0 \right\}.$$

Alors pour tout $1 \leqslant p < \infty$, le problème de Cauchy (PC) (où la seconde équation est entendue au sens de (I)) est bien posé dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Preuve. Soit u une solution telle que

$$u \in C\big([0,+\infty[, L^p(\mathbb{R}^N)\big) \ \cap \ Y.$$

Pour $t_0 > 0$, on pose $u_{t_0}(t) = u(t_0 + t)$. Alors u_{t_0} est une solution C^∞ et bornée sur $[0,+\infty[\times\mathbb{R}^N$ de (1.10) avec $u_{t_0}(0) = u(t_0)$. Par unicité (proposition 1.2), on a

$$u_{t_0}(t) = G(t,\cdot) * u(t_0).$$

Ainsi pour tous $t, t_0 > 0$ et (t,x) fixé,

$$\begin{aligned} u(t+t_0,x) = &\int_{\mathbb{R}^N} G(t,y)\, u(t_0, x-y)\, \mathrm{d}y \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \big[G(t+t_0,y) - G(t,y)\big]\, u(t_0,x-y)\, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Lorsque $t_0 \longrightarrow 0$, le premier terme converge vers $\displaystyle\int G(t,y)\, u_0(x-y)\, \mathrm{d}y = S(t)u_0(x)$ par (6.3) et par convergence dominée, tandis que le second terme tend vers 0 car $\|G(t+t_0) - G(t)\|_{L^{p'}} \longrightarrow 0$ et $\|u(t_0+\cdot)\|_{L^p}$ reste bornée. On en déduit que $u = S(t)u_0$, d'où l'unicité.

Il reste à montrer que $u(t) = S(t)u_0$ satisfait bien toutes les propriétés d'existence, d'unicité et de continuité du flot.

Remarque 3 (Importance des semi-groupes)
L'introduction des semi-groupes dans l'étude de l'équation de la chaleur n'est pas seulement une commodité technique : elle constitue un cadre conceptuel très puissant pour les équations d'évolution linéaires. Leur importance peut être résumée par plusieurs points :

1. ***Lien entre analyse fonctionnelle et EDP.*** *Le semi-groupe $(S_t)_{t\geqslant 0}$ met en évidence*

que l'équation de la chaleur peut être vue comme une équation d'évolution abstraite

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t), \qquad u(0) = u_0,$$

où $A = \Delta$ est l'opérateur générateur infinitésimal. La théorie de Hille–Yosida donne des conditions nécessaires et suffisantes sur A pour engendrer un semi-groupe fortement continu. Ainsi, l'analyse d'EDP est ramenée à un problème d'analyse fonctionnelle abstraite.

2. ***Existence, unicité et stabilité.*** *La représentation $u(t) = S_t u_0$ fournit immédiatement existence et unicité de la solution, ainsi qu'une estimation de stabilité :*

$$\|S_t u_0\|_X \leqslant \|u_0\|_X, \qquad t \geqslant 0,$$

qui exprime la décroissance (ou au moins la non-amplification) de l'énergie. C'est exactement le type d'estimations « a priori » qui garantit la continuité de la dépendance en la donnée initiale.

3. ***Continuité temporelle et régularisation.*** *Le fait que S_t soit fortement continu signifie que la trajectoire $t \mapsto S_t u_0$ est continue en temps dans X. De plus, le noyau gaussien G_t possède un effet de régularisation : pour tout $u_0 \in L^p$, on a $S_t u_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t > 0$. Ce phénomène illustre le rôle du semi-groupe comme « propagateur » qui lisse instantanément la donnée initiale.*

4. ***Structure de flot et Markovianité.*** *L'identité $S_{t+s} = S_t S_s$ exprime la composition temporelle du système, analogue à la propriété de Markov : l'évolution future ne dépend que de l'état présent. Cette perspective rend possible une approche probabiliste, où S_t est vu comme l'opérateur de transition d'un mouvement brownien.*

5. ***Extensions et généralisations.*** *La méthode des semi-groupes s'étend à une vaste classe d'opérateurs générateurs : Laplacien fractionnaire, opérateurs elliptiques non homogènes, opérateurs de Schrödinger, etc. Elle fournit ainsi une unification de nombreuses équations d'évolution dans un même cadre théorique.*

En résumé, les semi-groupes constituent le langage naturel pour relier analyse fonctionnelle et équations aux dérivées partielles d'évolution. Dans le cas de l'équation de la chaleur, le semi-groupe gaussien est le prototype qui illustre de façon transparente tous les mécanismes fondamentaux (existence, unicité, régularisation, décroissance).

Notation

Nous écrirons souvent dans ce mémoire $u(t)$ au lieu de $u(\cdot, t)$ par souci de concision, en espérant qu'aucune confusion n'en résultera. Ainsi, $u(t)$ est une fonction de x pour chaque t fixé.

2.8 Estimations ultra-contractives

Théorème 2.8.1 (Effets régularisants ultracontractifs) *Soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et soit u la solution de l'équation de la chaleur. Alors il existe une constante $C = C(p, N) > 0$ (universelle, ne dépendant que de p et de N) telle que, pour tout $t > 0$,*

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\, t^{-\frac{N}{2p}}\, \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Commentaire. Les *estimations ultra-contractives*, ou de *régularisation*, décrivent comment l'équation de la chaleur améliore instantanément la régularité et la décroissance des solutions, en transformant une donnée initiale peu régulière en une solution lisse pour tout $t > 0$.

Preuve. Par l'inégalité de Young, on a pour $1 \leqslant p < \infty$

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} = \|G_t * u_0\|_{L^\infty} \leqslant \|u_0\|_{L^p}\, \|G_t\|_{L^q}, \quad \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1.$$

Il reste donc à calculer $\|G_t\|_{L^q}$.

$$\begin{aligned} \|G_t\|_{L^q}^q &= \int_{\mathbb{R}^N} \left|(4\pi t)^{-N/2} e^{-|x|^2/(4t)}\right|^q \mathrm{d}x \\ &= (4\pi t)^{-qN/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\frac{q\,|x|^2}{4t}}\, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

Sachant que $\int_{\mathbb{R}^N} e^{-\alpha|x|^2}\, \mathrm{d}x = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{N/2}$ alors $\int e^{-\frac{q\,|x|^2}{4t}} = \pi^{N/2}\left(\frac{4t}{q}\right)^{N/2}$,

$$\begin{aligned} \|G_t\|_{L^q}^q &= (4\pi t)^{-qN/2}\, \pi^{N/2}\, (4t/q)^{N/2} \\ &= \pi^{N/2}\, q^{-N/2}\, (4\pi t)^{-qN/2}\, (4t)^{N/2}. \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{aligned} \|G_t\|_{L^q} &= \left[\pi^{N/2}\, q^{-N/2}\right]^{1/q} (4\pi t)^{-N/2}\, (4t)^{N/(2q)} \\ &= \underbrace{(\pi/q)^{N/(2q)}}_{C(p,N)}\, (4\pi t)^{-\frac{N}{2}(1-1/q)} \\ &= C(p,N)\, t^{-\frac{N}{2p}}, \end{aligned}$$

puisque $1 - 1/q = 1/p$. On en déduit qu'il existe une constante $C = C(p, N)$ telle que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leqslant \|u_0\|_{L^p}\, \|G_t\|_{L^q} \leqslant C\, \|u_0\|_{L^p}\, t^{-\frac{N}{2p}}.$$

C'est la propriété d'ultra-contractivité du semi-groupe de la chaleur.

■

Lemme 2.8.2 (Contrôle par une gaussienne en temps décalé)
Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, non négative et à support compact. Soit $u(x,t)$ la solution de l'équation de la chaleur posée sur $\mathbb{R}^N$ avec condition initiale u_0. Alors il existe une constante $C > 0$, dépendant de u_0, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $t > 0$,

$$u(x,t) \leqslant C\, G(x, t+1),$$

où G est le noyau fondamental de la chaleur sur $\mathbb{R}^N$.

Preuve. On sait que :

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x-y,t)\, u_0(y)\, dy.$$

Soit $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact tel que $\operatorname{supp}(u_0) \subset K$, et notons $R > 0$ tel que $K \subset B(0,R)$. Comme u_0 est positive et à support compact, on pose :

$$M := \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\, dy > 0.$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et $t > 0$,

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_K G(x-y,t)\, u_0(y)\, dy \\ &\leqslant \sup_{y\in K} G(x-y,t) \cdot \int_K u_0(y)\, dy \\ &\leqslant M \cdot \sup_{y\in K} G(x-y,t). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Par ailleurs pour tout $y \in K \subset B(0,R)$, on a :

$$|x-y|^2 \geqslant (|x| - R)^2.$$

Donc :

$$G(x-y,t) \leqslant \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp\left(-\frac{(|x|-R)^2}{4t}\right).$$

On a :

$$G(x,t+1) = \frac{1}{(4\pi(t+1))^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4(t+1)}\right).$$

Or, pour $|y-x| \leqslant R$,

$$\frac{G(x-y,\, t)}{G(x,\, t+1)} = \Big(\frac{t+1}{t}\Big)^{N/2} \exp\Big(\frac{|x|^2}{4(t+1)} - \frac{|w|^2}{4t}\Big) \;\leqslant\; \Big(\frac{t+1}{t}\Big)^{N/2} \exp\Big(\frac{R^2}{4t}\Big).$$

Ce qui implique que :

$$G(x-y,\, t) \leqslant C(R,t) \cdot G(x,\, t+1)$$

avec

$$C(R,t) = \Big(\frac{t+1}{t}\Big)^{N/2} \exp\Big(\frac{R^2}{4t}\Big),$$

De (2.13), on obtient :

$$u(x,\,t) \;\leqslant\; \widetilde{C}\cdot G(x,t+1)$$

où $\widetilde{C} = MC(R,t)$

■

2.9 Estimations de régularité

Théorème 2.9.1 (Estimations temporelles et spatiales pour la chaleur) *Soit* $u : [0,+\infty[\times\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *la solution de*

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u, & (x,t)\in\mathbb{R}^N\times]0,+\infty[,\\ u(\cdot,0) = u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N), & 1\leqslant p\leqslant\infty. \end{cases}$$

Alors les assertions suivantes sont vérifiées :

(*i*) *Il existe une constante universelle* $C = C(p,N) > 0$ *telle que, pour tout* $t > 0$,

$$\left\|\tfrac{d}{dt}u(t)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \;\leqslant\; C\,\frac{\|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}}{t}.$$

(*ii*) *Si* $u \geqslant 0$, *alors on a la minoration ponctuelle*

$$\partial_t u(x,t) \;\geqslant\; -\frac{N}{2}\,\frac{u(x,t)}{t}, \quad \textit{et la constante } \tfrac{N}{2} \textit{ est optimale.}$$

(*iii*) *Pour tout* $t > 0$ *et tout* $i = 1,\dots,N$,

$$\left|\partial_{x_i} u(x,t)\right| \;\leqslant\; C\,\frac{\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}}{t^{1/2}}.$$

De plus, une inégalité analogue tient pour $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

(*iv*) *Les dimensions (puissances de t) sont toutes homogènes dans ces formules.*

Preuve.

(*i*) Rappelons que $u_t = \Delta u$. En convolution :

$$\Delta u(t) = \Delta\big(G_t * u_0\big) = \big(\Delta G_t\big) * u_0.$$

Par l'inégalité de Young $L^1 * L^p \longrightarrow L^p$,

$$\|\partial_t u(t)\|_{L^p} = \|\Delta G_t * u_0\|_{L^p} \leqslant \|\Delta G_t\|_{L^1}\,\|u_0\|_{L^p}.$$

Il reste à calculer $\|\Delta G_t\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^N} \left|\Delta G_t(x)\right| \mathrm{d}x$. On vérifie directement que

$$\Delta G_t(x) = \Big(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{N}{2t}\Big)\, G_t(x), \qquad G_t(x) = (4\pi t)^{-N/2} e^{-|x|^2/(4t)}.$$

En utilisant la symétrie radiale et la formule de l'espérance pour la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 2t\, I)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^2}{4t^2}\, G_t(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{4t^2}\, \mathbb{E}\big[|X|^2\big] = \frac{1}{4t^2}\, (2Nt) = \frac{N}{2t},$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{N}{2t}\, G_t(x)\, \mathrm{d}x = \frac{N}{2t}.$$

Ainsi, pour la norme L^1,

$$\|\Delta G_t\|_{L^1} = \frac{N}{t}.$$

On en déduit

$$\|\partial_t u(t)\|_{L^p} \leqslant \frac{N}{t}\, \|u_0\|_{L^p}.$$

(ii) Pour $u_0 \geqslant 0$, on utilise l'expression explicite :

$$\partial_t G_t(x) = \Big(\frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{N}{2t}\Big)\, G_t(x).$$

D'où

$$\frac{\partial_t G_t(x)}{G_t(x)} = \frac{|x|^2}{4t^2} - \frac{N}{2t} \geqslant -\frac{N}{2t}.$$

Par convolution avec $u_0 \geqslant 0$,

$$\partial_t u(x,t) = (\partial_t G_t) * u_0 \geqslant -\frac{N}{2t}\, (G_t * u_0)(x) = -\frac{N}{2t}\, u(x,t),$$

soit

$$\partial_t u \geqslant -\frac{N}{2}\, \frac{u}{t}.$$

La constante optimale est $C_1 = \frac{N}{2}$.

(iii) Pour chaque coordonnée i,

$$\partial_{x_i} u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_{x_i} G_t(x-y)\, u_0(y)\, \mathrm{d}y, \qquad \partial_{x_i} G_t(x) = -\frac{x_i}{2t}\, G_t(x).$$

On calcule la norme L^1 de $\partial_{x_i} G_t$:

$$\|\partial_{x_i} G_t\|_{L^1} = \frac{1}{2t} \int_{\mathbb{R}^N} |x_i|\, G_t(x)\, \mathrm{d}x.$$

Par symétrie et espérance,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x_i|\, G_t(x)\, \mathrm{d}x = \mathbb{E}\big[|X_i|\big] = \sqrt{\frac{4t}{\pi}},$$

donc

$$\|\partial_{x_i} G_t\|_{L^1} = \frac{1}{2t}\sqrt{\frac{4t}{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\, t}}.$$

Par Young $L^1 * L^\infty \longrightarrow L^\infty$,

$$\|\partial_{x_i} u(\cdot,t)\|_{L^\infty} \leqslant \|u_0\|_{L^\infty}\, \|\partial_{x_i} G_t\|_{L^1} = \frac{\|u_0\|_{L^\infty}}{\sqrt{\pi\, t}}.$$

Ainsi

$$\|\nabla u(\cdot,t)\|_{L^\infty} = O\big(t^{-1/2}\big)\, \|u_0\|_{L^\infty}.$$

(*iv*) Toutes ces estimations sont cohérentes sur le plan dimensionnel : le temps a des unités de longueur 2, donc chaque dérivée spatiale donne un facteur $t^{-1/2}$, et la dérivée temporelle donne t^{-1}.

■

2.10 Quelques propriétés fondamentales

2.10.1 Conservation de la masse pour $p = 1$.

Proposition 2.10.1
Si $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, alors la solution de l'équation de la chaleur satisfait

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\, dx \quad \textit{pour tout } t \geqslant 0.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\, dx &= \iint_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N} G(t, x-y)\, u_0(y)\, dy\, dx. \\
\text{(Fubini)} &= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \left(\int_{\mathbb{R}^N} G(t,z)\, dz \right) dy \ \text{ où } (z = x-y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\, dy. \text{ d'après le Lemme 2.2.3}
\end{aligned}$$

■

2.10.2 Masse signée versus masse absolue.

Pour une solution signée, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \big|u(x,t)\big|\, \mathrm{d}x$ décroît (la diffusion « mélange » les parties positives et négatives). Par exemple, si

$$u_0(x) = \delta(x-a) - \delta(x+a), \quad u(x,t) = G(x-a,t) - G(x+a,t),$$

alors $\int u = 0$ mais $\int |u|$ décroît en t.

2.10.3 Décroissance des normes L^p ($p > 1$).

Pour $p > 1$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)|^p \,\mathrm{d}x$ diminue en temps. En particulier, pour la solution gaussienne

$$G(x,t) \;=\; (4\pi t)^{-N/2} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{4t}\Big),$$

on calcule

$$\begin{aligned}\|G(\cdot,t)\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^N} (4\pi t)^{-Np/2} \exp\Big(-\frac{p|x|^2}{4t}\Big)\,\mathrm{d}x \\ &= (4\pi t)^{-Np/2}\left(\tfrac{4\pi t}{p}\right)^{N/2} \;=\; p^{-N/2}\,(4\pi t)^{-\frac{N}{2}(p-1)}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|G(\cdot,t)\|_{L^p} = p^{-\frac{N}{2p}}\,(4\pi t)^{-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{p})} \;\sim\; t^{-\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)},$$

ce qui décroit strictement plus vite que le cas $p = 1$.

Commentaire : Ces calculs illustrent comment les « moments » d'ordre supérieur se dissipent sous l'action de la diffusion.

2.10.4 Premier moment (centre de masse).

Posons

$$\mathcal{M}_1(t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} x\,u(x,t)\,\mathrm{d}x = \Big(\int x_i\,u(x,t)\,\mathrm{d}x\Big)_{i=1}^N.$$

En dérivant sous le signe intégral et en intégrant par parties, on obtient pour chaque coordonnée i

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\mathbb{R}^N} x_i\,u(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} x_i\,\partial_t u\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} x_i\,\Delta u\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \Delta(x_i)\,u\,\mathrm{d}x = 0,$$

puisque $\Delta(x_i) = 0$. Ainsi $\mathcal{M}_1(t)$ est constant.

2.10.5 Second moment.

Définissons

$$\mathcal{M}_2(t) \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} |x|^2\,u(x,t)\,\mathrm{d}x.$$

Un calcul analogue donne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int |x|^2\,u\,\mathrm{d}x = \int |x|^2\,\Delta u\,\mathrm{d}x = \int \Delta\big(|x|^2\big)\,u\,\mathrm{d}x = 2N\int u\,\mathrm{d}x = 2N\int u_0\,\mathrm{d}x,$$

car $\Delta(|x|^2) = 2N$ et la masse $\int u = \int u_0$ est conservée. En intégrant en temps, on obtient

$$\mathcal{M}_2(t) = \mathcal{M}_2(0) + 2N\Big(\int u_0\Big)\, t.$$

Pour une masse unitaire $\big(\int u_0 = 1\big)$, cela se lit

$$\int |x|^2\, u(x,t)\, \mathrm{d}x = \int |x|^2\, u_0(x)\, \mathrm{d}x \; + \; 2N\, t,$$

montrant que le second moment croît linéairement en t.

CHAPITRE 3

Convergence en temps long des solutions avec donnée initiale non négative

Avant d'examiner le comportement des solutions à long terme pour $u_0 \geqslant 0$, il est essentiel de rappeler que l'espace considéré et la nature de u_0 influencent fortement la diffusion. Dans l'espace entier $\mathbb{R}^N$, la chaleur se propage sans contraintes, permettant aux solutions de s'approcher progressivement d'un profil de type gaussien. Ce chapitre se concentre donc sur l'analyse de cette convergence asymptotique lorsque $t \longrightarrow +\infty$.

3.1 Convergence en norme L^1, L^∞et L^p

Théorème 3.1.1 (Convergence en norme L^1, L^∞et L^p) *Soit $1 < p \leqslant \infty$ et soit $u \in L^p$. Alors ils existent $\alpha_p := : \alpha(p) > 0$ et $C := C(p, N)$ telle que*

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant C \frac{\|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}}{t^{\alpha_p}}$$

Preuve.

Cas 1. Si $p = \infty$.
Observation : $G(t) \in \mathrm{L}^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)$ car

$$|G(t,x)| = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) \leqslant \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} < \infty \text{ (par rapport à la variable espace)}$$

Par suite

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^N,\ |u(t,x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} G(t,y)(u_0 x - y)dy\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |G(t,y)||(u_0 x - y)|dy \\ &\leqslant \|G(t)\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} |(u_0 x - y)|dy \\ &\leqslant \|G(t)\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} < \infty \end{aligned}$$

Alors $u \in \mathrm{L}^{\infty}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et

$$\|u(t)\|_{\mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|G(t)\|_{\mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R}^N)} \|u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}$$

Puisque

$$\|G(t)\|_{\mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R}^N)} \leqslant \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}$$

Alors

$$\|u(t)\|_{\mathrm{L}^{\infty}(\mathbb{R}^N)} \leqslant \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}}} \frac{\|u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}}{t^{\frac{N}{2}}}$$

Cas 2. Si $1 < p < \infty$.
Observation : $G(t) \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)$. En effet :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |G(t,x)|^p \, dx &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{Np}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{p|x|^2}{4t}\right) dx \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{Np}{2}}} \left(\frac{4\pi t}{p}\right)^{\frac{N}{2}} \\
&= \frac{1}{p^{\frac{N}{2}}} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}(p-1)}} < \infty
\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left| \int_{\mathbb{R}^N} G(t,y)(u_0 x - y) dy \right|^p dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |G(t,y)||(u_0 x - y)| dy \right)^p dx \\
&= \|u_0\|^p_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |G(t,y)| d\mu(y) \right)^p dx \\
&\qquad \text{où } \; d\mu(y) = \frac{|(u_0 x - y)|}{\|u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}} dy \\
&\leqslant \|u_0\|^p_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |G(t,y)|^p d\mu(y) \right) dx \\
&\qquad \left(\text{Hölder et } \int_{\mathbb{R}^N} d\mu(y) = 1 \right) \\
&\leqslant \|u_0\|^{p-1}_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |G(t,y)|^p |(u_0 x - y)| dy \right) dx \\
\text{(Fubini)} \quad &\leqslant \|u_0\|^{p-1}_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|G(t,y)|^p \int_{\mathbb{R}^N} |(u_0 x - y)| dx \right) dy \\
&\leqslant \|u_0\|^{p-1}_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|G(t,y)|^p \, \|u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} \right) dy \\
&\leqslant \|u_0\|^p_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} \|G(t)\|^p_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)} < \infty
\end{aligned}$$

Alors $u \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|u(t)\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant \|u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} \|G(t)\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)}$$

Or

$$\begin{aligned}\|G(t)\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)} &= \left[\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{Np}{2}}}\left(\frac{4\pi t}{p}\right)^{\frac{N}{2}}\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{N}{2}}}\left(\frac{4\pi t}{p}\right)^{\frac{N}{2p}} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}p^{\frac{N}{2p}}}\left[\frac{1}{t^{\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}}\right]\end{aligned}$$

Alors,

$$\|u(t)\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)} \leqslant C_p \frac{\|u_0\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}}{t^{\alpha_p}}$$

où

$$C_p = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}p^{\frac{N}{2p}}}$$

et

$$\alpha_p = \frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{N}{2}\left(\frac{p-1}{p}\right) > 0$$

■

Nous énonçons maintenant le théorème principal :

Théorème 3.1.2 (Convergence vers la Gaussienne | C.f [7]) *Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et soit*

$$M = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,dx$$

sa masse. Alors la solution $u(t) = u(\cdot,t)$ de l'équation de la chaleur dans tout l'espace se comporte, pour $t \longrightarrow \infty$, comme M fois la solution fondamentale $u(t) = G_t$, au sens où

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \|u(t) - M\,G_t\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0 \tag{3.1}$$

et de plus

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} t^{N/2}\,\|u(t) - M\,G_t\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0. \tag{3.2}$$

Par interpolation, on obtient le résultat de convergence pour toutes les normes L^p :

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} t^{\frac{N(p-1)}{2p}}\,\|u(t) - M\,G_t\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = 0, \tag{3.3}$$

pour tout $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Remarque 4
On peut vérifier que $\|G(t,\cdot)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = C(p,N)t^{-\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}$ *pour une constante* $C(p,N) > 0$.
Si $M \neq 0$, *la décomposition* (3.1) *et la borne* (3.2) *assurent que la taille de* v *dans* L^p *est négligeable par rapport à celle de* G. *La solution ressemble donc à* $MG(t)$ *en temps long.*

3.2 Preuve du Théorème 3.1.2 via la formule explicite

NB. Ici $\alpha_p = \frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)$.

Preuve. Supposons que

$$\mathcal{N}_1 := \int_{\mathbb{R}^N} |x||u_0(x)|dx < \infty.$$

Nous allons procéder par étape.
Étape 1 : Supposons les limites (3.1) et (3.2) sont vraies et montrons (3.3).

$$\begin{aligned}
t^{\alpha_p}\|u(t)-MG(t)\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)} &= t^{\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u(t,x)-MG(t,x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= t^{\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u(t,x)-MG(t,x)|^{p-1}|u(t,x)-MG(t,x)|dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant t^{\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\|u(t)-MG(t)\|^{p-1}_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^N)}|u(t,x)-MG(t,x)|dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant t^{\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|u(t)-MG(t)\|^{\frac{p-1}{p}}_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^N)}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|u(t,x)-MG(t,x)|dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(t^{\frac{N}{2}}\|u(t)-MG(t)\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^N)}\right)^{\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left(\|u(t)-MG(t)\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Par suite

$$t^{\alpha_p}\|u(t)-MG(t)\|_{\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)} \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad t \longrightarrow \infty$$

Étape 2 : Nous allons prouver à présent (3.1) et (3.2).

– Estimation de $t^{\frac{N}{2}}\|u(t)-MG(t)\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}^N)}$

Soit $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}
|u(t,x)-MG(t,x)| &\leqslant \left|\int_{\mathbb{R}^N} G(t,x-y)u_0(y)dy - \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)G(t,x)dy\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\,|G(t,x-y)-G(t,x)|\,dy
\end{aligned}$$

Observons que

$$G(t,x-y)-G(t,x) = \int_0^1 \partial_s G(t,x-sy)ds$$

Alors

$$\begin{aligned} |u(t,x) - MG(t,x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \left(\int_0^1 |\partial_s G(t, x-sy)| ds \right) dy \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) |\partial_s G(t,x-sy)| dy \right) ds \qquad \text{(Fubini)} \end{aligned}$$

Mais

$$\partial_s G(t,x-sy) = -\frac{y.(x-sy)}{2t} G(t,x-sy)$$

Ainsi

$$|u(t,x) - MG(t,x)| \leqslant \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \frac{|y||x-sy|}{2t} G(t,x-sy) dy \right) ds \qquad \text{(Cauchy-Schwartz)}$$

Posons $\xi = (x-sy)t^{-\frac{1}{2}}$. Nous avons : $sy = x - t^{\frac{1}{2}}\xi$, $dy = (-1)^N s^{-N} t^{\frac{N}{2}} d\xi$.
Par suite

$$\begin{aligned} |u(t,x) - MG(t,x)| &\leqslant \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_0 \left(\frac{1}{s}(x - t^{\frac{1}{2}}\xi) \right) \frac{\left|\frac{1}{s}(x-t^{\frac{1}{2}}\xi)\right| t^{\frac{1}{2}}|\xi|}{2t} G(t, t^{\frac{1}{2}}\xi) s^{-N} t^{\frac{N}{2}} d\xi \right) ds \\ &\leqslant \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_0 \left(\frac{1}{s}(x - t^{\frac{1}{2}}\xi) \right) \frac{\left|\frac{1}{s}(x-t^{\frac{1}{2}}\xi)\right| t^{\frac{1}{2}}|\xi|}{(2t)(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right) s^{-N} t^{\frac{N}{2}} d\xi \right) ds \qquad (3.4) \end{aligned}$$

Observons que $0 \leqslant |\xi| \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right) \leqslant 1$. En effet :
Posons $g(r) = r\exp\left(-\frac{r^2}{4}\right)$ avec $r = |\xi| > 0$. g est dérivable et

$$g'(r) = \left(1 - \frac{r^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{4}\right)$$

$$g'(r) = 0 \iff r = \sqrt{2}$$

r	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(r)$		$+$	0	$-$	
$g(r)$	0	↗	$g(\sqrt{2})$	↘	0

Mais $g(\sqrt{2}) = \sqrt{2}\exp\left(-\frac{1}{2}\right) \leqslant 1, \ \forall r > 0$. D'où $0 \leqslant g(r) \leqslant 1, \ \forall r > 0$.
Par suite

$$|u(t,x) - MG(t,x)| \leqslant \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_0 \left(\frac{1}{s}(x - t^{\frac{1}{2}}\xi) \right) \frac{\left|\frac{1}{s}(x-t^{\frac{1}{2}}\xi)\right| t^{\frac{1}{2}}}{(2t)(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} s^{-N} t^{\frac{N}{2}} d\xi \right) ds$$

En faisant le même changement de variable $sy = x - t^{\frac{1}{2}}\xi$, $d\xi = (-1)^N s^N t^{-\frac{N}{2}} dy$ et

$$\begin{aligned} |u(t,x) - MG(t,x)| &\leqslant \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \frac{|y|\, t^{\frac{1}{2}}}{(2t)(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} dy \right) ds \\ &\leqslant \frac{t^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{N}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |y| u_0(y)\, dy \right) ds \\ &\leqslant \frac{t^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{N}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{N}{2}}} \mathcal{N}_1 \end{aligned}$$

D'où

$$t^{\frac{N}{2}} \|u(t) - MG(t)\|_{\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\mathcal{N}_1 t^{-\frac{1}{2}}$$

avec $C > 0$ une constante.

– Estimation de $\|u(t) - MG(t)\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}^N)}$

Parfois, notons $D := \|u(t) - MG(t)\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}$ pour éviter les dépassements de lignes. Soit $x \in \mathbb{R}^N$. De l'inégalité (3.4), on a :

$$|u(t,x) - MG(t,x)| \leqslant \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(\frac{1}{s}(x - t^{\frac{1}{2}}\xi)\right) \frac{\left|\frac{1}{s}(x - t^{\frac{1}{2}}\xi)\right| t^{\frac{1}{2}} |\xi|}{(2t)(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right) s^{-N} t^{\frac{N}{2}} d\xi \right) ds$$

En utilisant Fubini, on obtient

$$D \leqslant \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} |\xi| \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(\frac{1}{s}(x - t^{\frac{1}{2}}\xi)\right) \frac{\left|\frac{1}{s}(x - t^{\frac{1}{2}}\xi)\right| t^{\frac{1}{2}}}{(2t)(4\pi t)^{\frac{N}{2}}} s^{-N} t^{\frac{N}{2}} dx \right) d\xi\, ds$$

Faisons le changement de variable $K = \frac{1}{s}(x - t^{\frac{1}{2}}\xi)$ et $dK = s^{-N} dx$ donc $dx = s^N dK$. Alors

$$\begin{aligned} \|u(t) - MG(t)\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)} &\leqslant \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} |\xi| \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right) \left(\int_{\mathbb{R}^N} |K| u_0(K) \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{N}{2}}} dK \right) d\xi\, ds \\ &\leqslant \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{2(4\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} |\xi| \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right) \left(\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} |K| u_0(K) dK}_{\mathcal{N}_1} \right) d\xi\, ds \\ &\leqslant t^{-\frac{1}{2}} M \frac{1}{2(4\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} |\xi| \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right) d\xi\, ds \\ &\leqslant t^{-\frac{1}{2}} M \frac{1}{2(4\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi| \exp\left(-\frac{|\xi|^2}{4}\right) d\xi \\ &\leqslant t^{-\frac{1}{2}} M \frac{1}{2(4\pi)^{\frac{N}{2}}} \int_0^{+\infty} \int_{S^{N-1}} r e^{-\frac{r^2}{4}} r^{d-1} d\omega\, dr \qquad \text{(Coor. polaires)} \end{aligned}$$

$$\leqslant \quad t^{-\frac{1}{2}}\mathcal{N}_1\frac{\omega_N}{2(4\pi)^{\frac{N}{2}}}\int_0^{+\infty} r^N e^{-\frac{r^2}{4}}dr$$

$\forall r>0,\ r^N e^{-\frac{r^2}{4}}>0$. A-t-on $\int_0^{+\infty} r^N e^{-\frac{r^2}{4}}dr<\infty$?

$$\lim_{r\longrightarrow+\infty}\frac{r^N e^{-\frac{r^2}{4}}}{\frac{1}{r^2}}=\lim_{r\longrightarrow+\infty} r^{N+2}e^{-\frac{r^2}{4}}=0$$

Or $\int_0^{+\infty}\frac{1}{r^2}dr<\infty$, donc

$$\int_0^{+\infty} r^N e^{-\frac{r^2}{4}}dr<\infty$$

D'où

$$\|u(t)-MG(t)\|_{\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^N)}\leqslant C\mathcal{N}_1 t^{-\frac{1}{2}}$$

avec $C>0$ une constante.

Argument final. Soit $\delta>0$. Choisissons $0\leqslant u_{0_\delta}\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\|u_0-u_{0_\delta}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}<\delta.$$

Notons u (resp. u_δ) la solution de l'équation de la chaleur de donnée initiale u_0 (resp. u_{0_δ}), et

$$M=\int_{\mathbb{R}^N}u_0(x)\,dx,\qquad M_\delta=\int_{\mathbb{R}^N}u_{0_\delta}(x)\,dx.$$

(i) Convergence en L^1. Par contraction du semi-groupe de la chaleur, on a pour tout $t\geqslant 0$

$$\|u(t)-u_\delta(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\leqslant\|u_0-u_{0_\delta}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}<\delta.$$

D'après l'étape 2 appliquée à u_{0_δ} (qui a moment d'ordre 1 fini), on sait que

$$\|u_\delta(t)-M_\delta G(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\xrightarrow[t\longrightarrow\infty]{}0.$$

Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\|u(t)-MG(t)\|_{L^1}&\leqslant\|u(t)-u_\delta(t)\|_{L^1}+\|u_\delta(t)-M_\delta G(t)\|_{L^1}+|M_\delta-M|\,\|G(t)\|_{L^1}\\&\leqslant\delta+\|u_\delta(t)-M_\delta G(t)\|_{L^1}+|M_\delta-M|.\end{aligned}$$

En passant à la limite supérieure quand $t\longrightarrow\infty$ on obtient

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty}\|u(t)-MG(t)\|_{L^1}\leqslant\delta+|M_\delta-M|.$$

Or $|M_\delta - M| = \left|\int (u_{0_\delta} - u_0)\right| \leqslant \|u_0 - u_{0_\delta}\|_{L^1} \longrightarrow 0$ quand $\delta \longrightarrow 0$. En faisant tendre d'abord $t \longrightarrow \infty$ puis $\delta \longrightarrow 0$, on conclut

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \|u(t) - MG(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

(ii) Convergence en L^∞ après multiplication par $t^{N/2}$. On écrit de nouveau la décomposition triangulaire, multipliée par $t^{N/2}$:

$$t^{\frac{N}{2}}\|u(t) - MG(t)\|_{L^\infty} \leqslant t^{\frac{N}{2}}\|u(t) - u_\delta(t)\|_{L^\infty} + t^{\frac{N}{2}}\|u_\delta(t) - M_\delta G(t)\|_{L^\infty} + t^{\frac{N}{2}}|M_\delta - M|\ \|G(t)\|_{L^\infty}.$$

Par l'estimation issue du théorème 3.1.1 (appliquée à la donnée $u_0 - u_{0_\delta}$), il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t > 0$,

$$t^{\frac{N}{2}}\|u(t) - u_\delta(t)\|_{L^\infty} \leqslant C\|u_0 - u_{0_\delta}\|_{L^1} \leqslant C\delta.$$

Par l'étape 2 appliquée à u_{0_δ} on a

$$t^{\frac{N}{2}}\|u_\delta(t) - M_\delta G(t)\|_{L^\infty} \xrightarrow[t\longrightarrow\infty]{} 0.$$

Enfin $\|G(t)\|_{L^\infty} = (4\pi t)^{-N/2}$, donc

$$t^{\frac{N}{2}}|M_\delta - M|\ \|G(t)\|_{L^\infty} = (4\pi)^{-N/2}|M_\delta - M|.$$

En passant à la limite supérieure quand $t \longrightarrow \infty$ on obtient

$$\limsup_{t\longrightarrow\infty} t^{\frac{N}{2}}\|u(t) - MG(t)\|_{L^\infty} \leqslant C\delta + (4\pi)^{-N/2}|M_\delta - M|.$$

Comme précédemment $|M_\delta - M| \leqslant \|u_0 - u_{0_\delta}\|_{L^1} \longrightarrow 0$ quand $\delta \longrightarrow 0$. En faisant tendre $\delta \longrightarrow 0$ on en déduit

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} t^{\frac{N}{2}}\|u(t) - MG(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

■

Commentaire.–Rôle de la masse et des moments | C.f [7]

• Le fait de travailler dans tout l'espace est crucial pour le résultat du Théorème 3.1.2. Le comportement des solutions de l'équation de la chaleur posée dans un domaine borné avec différents types de conditions aux bords est également connu, et le comportement asymptotique ne suit pas le profil gaussien.

• Comme nous le verrons ci-après, la convergence vers la gaussienne a lieu à la condition que les données appartiennent à la classe des fonctions intégrables, qui peuvent sans problème être étendues aux mesures de Radon bornées. Ce n'est en fait pas une nouveauté, car la théorie indique que la solution correspondant à une mesure initiale $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ est intégrable et bornée pour tout temps positif ; on peut donc déplacer l'origine des temps et supposer que les données sont intégrables et bornées. Nous soulignons toutefois que certaines démonstrations fonctionnent directement pour les

mesures sans aucun souci.

• Il convient de souligner que la convergence vers la gaussienne n'est pas valable pour les données initiales qui ne sont pas intégrables. En effet, si l'on prend par exemple une donnée initiale constante $u_0(x) \equiv c > 0$, la solution correspondante est également constante et ne peut donc en aucun cas approcher la gaussienne, laquelle tend vers zéro lorsque $t \longrightarrow \infty$. Cet exemple montre déjà que le résultat précédent n'est pas valable dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

De manière plus générale, il en va de même pour toutes les données appartenant à des espaces $L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $p > 1$, mais non intégrables. En effet, un argument d'approximation et de comparaison montre que si $u_0 \geqslant 0$ et

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\, dx = +\infty,$$

alors la solution $u(x,t)$ vérifie

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} t^{N/2} u(x,t) = +\infty, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N,$$

et cette divergence est uniforme sur tout compact en x.

Ainsi, la convergence asymptotique vers la gaussienne n'est valide que pour les données initiales intégrables, c'est-à-dire $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

• $M = 0$ est un cas particulier qui mérite attention : même si le Théorème (3.1.2) est vrai, son énoncé n'implique pas que la solution tende asymptotiquement vers une gaussienne ; plus précisément, il ne dit que la première approximation d'ordre 1 disparaît. Si l'on veut des informations plus précises sur la forme et la taille de la solution, il faut aller plus loin pour identifier les termes pertinents. Cette question sera traitée ci-dessous. Pour l'instant, remarquons que la différentiation en x_i du noyau de chaleur produit une nouvelle solution d'intégrale nulle :

$$u_i(x,t) = \partial_{x_i} G_t(x) = C\, t^{-(N+2)/2} x_i\, e^{-|x|^2/4t},$$

à laquelle on peut appliquer les remarques précédentes. En particulier,

$$t^{N/2} u_i(x,t) = O(t^{-1/2}),$$

où $O(\cdot)$ désigne la notation de Landau pour les ordres de grandeur.
• Il est intéressant de noter que la convergence en norme L^1 de la formule (3.1) peut se formuler sans faire appel à l'existence d'une solution fondamentale, de la façon suivante :

Théorème alternatif. Soient $u(t)$ et $v(t)$ deux solutions du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur dans tout l'espace, dont les données initiales satisfont $\int u_0\,dx = \int v_0\,dx$. Alors

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} |u(t) - v(t)|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0. \tag{3.5}$$

On pourrait adopter une approche similaire pour l'estimation en L^∞, mais certaines informations gaussiennes interviennent dans le poids $t^{N/2}$. Cette méthode alternative, d'abord observée par les spécialistes des processus stochastiques de type Brownien, est connue sous le nom de propriété de mélange et a été généralisée à de nombreuses variantes de l'équation de la chaleur.

3.3 Preuve du Théorème 3.1.2 par mise à l'échelle

Nous présentons une démonstration concise de la convergence asymptotique des solutions de l'équation de la chaleur, fondée sur la mise à l'échelle et le passage à la limite.

On définit la transformation uniparamétrique $\mathcal{T}_k$ sur les fonctions espace-temps par la formule

$$\mathcal{T}_k u(x,t) = k^N\, u(kx, k^2 t), \qquad k > 0.$$

Supposons que $u(x,t)$ est solution de la chaleur. Alors $u_k(x,t) = \mathcal{T}_k u(x,t)$ l'est aussi. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \partial_t u_k(x,t) &= k^N \frac{\partial}{\partial t}\Big[u(kx,k^2t)\Big] \\ &= k^{N+2}\,\big(\partial_t u\big)(kx,k^2t). \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned} \Delta_x u_k(x,t) &= k^N \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Big[u(kx,k^2t)\Big] \\ &= k^N \sum_{i=1}^N k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right)(kx,k^2t) \\ &= k^{N+2}\,\big(\Delta_x u\big)(kx,k^2t). \end{aligned}$$

Comme u satisfait $\partial_t u = \Delta u$, on a donc

$$\partial_t u_k(x,t) = \Delta_x u_k(x,t).$$

Par conséquent, u_k vérifie la même équation de la chaleur que u.
Par ailleurs, cette transformation préserve la masse totale. En effet, en posant $y = kx$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_k(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} k^N u(kx,k^2t)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} u(y,k^2t)\,dy,$$

qui est indépendante de t. Par conséquent la masse de $u_k(\cdot,t)$ reste toujours M.

Par les propriétés de régularisation du noyau de chaleur $G(x,t)$, on sait que pour tout $t_1 > 0$, la solution u est C^∞ sur $[t_0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ et satisfait les estimations classiques.

Grâce à l'*effet régularisant ultracontractif* du théorème 2.8.1, il existe une constante universelle C telle que pour toute solution intégrable $v(x,t)$ on ait, pour $t > 0$,

$$\left\|v(\cdot,t)\right\|_\infty \leqslant C\, t^{-N/2} \left\|v(\cdot,0)\right\|_1$$

En appliquant cela à $u(\cdot,k^2t)$, on obtient pour u_k :

$$\begin{aligned} \left\|u_k(\cdot,t)\right\|_\infty &= k^N \left\|u(\cdot,k^2t)\right\|_\infty \\ &\leqslant k^N\, C\, (k^2t)^{-N/2} \left\|u_0\right\|_1 \\ &\leqslant C\, t^{-N/2}\, M \end{aligned}$$

Alors toute la famille $\{u_k\}_k$ est uniformément bornée dans $\mathbb{R}^N \times [t_1,\, \infty)$ où $t \geqslant t_1 > 0$.

De façon plus générale, en se référent au théorème 2.9.1 sur les estimations de régularité de type conservant le profil gaussien, il résulte que pour tout multi-indice α il existe C_α tel que :

$$\begin{aligned} \left\|\partial_x^\alpha u_k(\cdot,t)\right\|_\infty &= k^{N+|\alpha|} \left\|\partial^\alpha u(\cdot,k^2t)\right\|_\infty \\ &\leqslant k^{N+|\alpha|}\, C_\alpha\, (k^2t)^{-\frac{N}{2}-\frac{\alpha}{2}} \left\|u_0\right\|_1 \\ &\leqslant C_\alpha\, t^{\frac{N}{2}-\frac{\alpha}{2}}\, M < \infty \text{ (indépendant de) } k \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \geqslant t_0 > 0$ fixé, la famille (u_k) est uniformément bornée en norme L^∞ et pour toutes ses dérivées spatiales et temporelles sur $[t_0,\infty) \times \mathbb{R}^N$.

Grâce aux estimations uniformes, les familles

$$\{u_k\}_{k\geqslant 1} \quad \text{et} \quad \{\partial_x^\alpha u_k\}_{|\alpha|\geqslant 0}, \quad \{\partial_t u_k\}$$

sont equicontinues et uniformément bornées sur tout compact $K \times [t_1,T] \subset \mathbb{R}^N \times]0,+\infty[$.

Par le théorème d'Arzelà–Ascoli, il existe une sous-suite $k_j \longrightarrow \infty$ telle que

$$u_{k_j} \longrightarrow \widehat{u} \quad \text{uniformément sur } K \times [t_1,T],$$

et de même pour toutes les dérivées d'ordre arbitraire.

Le contrôle uniforme des queues garantit que cette convergence est également forte dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, sans perte de masse à l'infini. Ainsi la famille est pré-compacte en L^1_{loc}, assurant la convergence de u_{k_j} vers $\widehat{u}$ dans tous les domaines compacts.

Par passage à la limite dans l'équation de la chaleur satisfaite par chaque u_{k_j}, on obtient que

(*) $\qquad \widehat{u}(x,t)$ est solution faible sur $Q = \mathbb{R}^N \times]0,+\infty[$ de $\partial_t \widehat{u} = \Delta \widehat{u}$.

Nous ne donnerons pas la preuve de (*) dans ce memoire, voir [7], § section 3 "Proof of convergence by scaling, page 10.

Et les estimations uniformes assurent que $\widehat{u}$ est en réalité une *solution classique* (lisse en x et t) pour tout $t > 0$.

Pour tout multi-indice α et toute dérivée temporelle, on a convergence uniforme sur les compacts :

$$\partial_x^\alpha u_{k_j} \longrightarrow \partial_x^\alpha \widehat{u}, \quad \partial_t u_{k_j} \longrightarrow \partial_t \widehat{u}.$$

Dans la suite, on identifiera explicitement cette limite comme la solution fondamentale gaussienne.

Il s'agit maintenant de montrer que $\widehat{U}(x,t) = M\,G_t(x)$. Par unicité du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur avec une donnée initiale sous forme de mesure (ici une masse ponctuelle en l'origine), il suffit de vérifier que la solution limite $\widehat{U}$ a la même masse M et qu'elle prend pour condition initiale $M\,\delta_0$. Les arguments se font en deux sous-cas :

1er cas. Supposons que le support de $u_0 \geqslant 0$ compact. D'après le Lemme 2.8.2, on dispose alors d'une estimation du type $|u(x,t)| \leqslant CG(x,t+1)$ pour tout (x,t) et un certain $C > 0$. En appliquant à $\mathcal{T}_k$, on obtient :

$$|u_k(x,t)| \leqslant C\,\mathcal{T}_k\big(G(\cdot,t+1)\big)(x) = C\,G(x,t+k^{-2})\,.$$

Cette estimation globale fournit un contrôle uniforme par le haut des *masses de queue* des solutions u_k, c'est-à-dire des intégrales

$$\int_{|x|>R} u_k(x,t)\,dx$$

qui quantifient la masse située à l'extérieur de la boule de rayon R. Grâce à la majoration $u_k(x,t) \leqslant C\,G(x,t+k^{-2})$ et à la décroissance gaussienne rapide de G, on obtient que ces masses de queue deviennent arbitrairement petites lorsque $R \longrightarrow \infty$, uniformément en k.

Cette estimation fournit un contrôle uniforme par-dessus des solutions $u_k(x,t)$, en particulier dans les régions éloignées de l'origine (les « queues » de la solution). Ainsi, on peut éviter toute perte de masse lors du passage à la limite : grâce au théorème de Fatou, qui assure que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{U}(x,t)\,dx \leqslant \liminf_{k\longrightarrow\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_k(x,t)\,dx = M,$$

et combiné à la majoration uniforme précédente, on obtient l'égalité des masses :

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{U}(x,t)\,dx = M.$$

La masse totale est donc préservée dans la limite.

Par ailleurs, pour tout k,

$$u_k(\cdot,t) = G_t * u_k(\cdot,0).$$

Or $u_k(\cdot,0) = k^N u_0(k\cdot)$ converge faiblement vers $M\delta_0$. En effet, pour toute $\psi \in C_c(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_k(x,0)\,\psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\,\psi\big(\tfrac{y}{k}\big)\,dy \xrightarrow[k\longrightarrow\infty]{} M\psi(0).$$

Fixons $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $t > 0$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_k(x,t)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \big(G_t * \varphi\big)(y)\,u_k(y,0)\,dy.$$

La fonction $y \mapsto (G_t * \varphi)(y)$ est continue et bornée. En passant à la limite $k_j \longrightarrow \infty$, on obtient

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_{k_j}(x,t)\,\varphi(x)\,dx = M\,(G_t * \varphi)(0) = \int_{\mathbb{R}^N} MG(x,t)\,\varphi(x)\,dx.$$

Comme $u_{k_j}(\cdot,t) \longrightarrow \widehat{U}(\cdot,t)$ localement uniformément, on conclut que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \widehat{U}(x,t)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} MG(x,t)\,\varphi(x)\,dx.$$

Ainsi $\widehat{U}(\cdot,t) = MG(\cdot,t)$ en tant que distributions. En particulier, lorsque $t \longrightarrow 0^+$,

$$\widehat{U}(\cdot,t) \;\rightharpoonup\; M\delta_0.$$

Ainsi, la fonction $\widehat{U}$ est une solution classique de l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}^N\times]0,+\infty[$, avec masse totale M et donnée initiale $M\delta_0$ au sens des mesures. Par unicité du problème de Cauchy associé, il s'ensuit que

$$\widehat{U}(x,t) = M\,G(x,t), \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^N\times]0,+\infty[.$$

Cas général. Pour une donnée initiale générale $u_0 \geqslant 0$ appartenant à $L^1(\mathbb{R}^n)$, on procède par approximation : on considère une suite $u_0^{(N)}$ de fonctions positives, bornées, à support compact, telles que

$$u_0^{(N)} \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} u_0 \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^n).$$

On note $u_k^{(N)}$ la suite de solutions associée à chaque $u_0^{(N)}$. Alors la limite de chaque $u_k^{(N)}$ est $M^{(N)}G(x,t)$, où

$$M^{(N)} = \int_{\mathbb{R}^N} u_0^{(N)} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^N} u_0 = M$$

.

Compte tenu de la L^1 du semi-groupe de la chaleur alors :

$$\|u_k^{(N)}(\cdot,t) - u_k(\cdot,t)\|_{L^1} \leqslant \|u_0^{(N)} - u_0\|_{L^1}.$$

Cela garantit que la limite finale associée à u_0 est également $MG(x,t)$. Par passage à

la limite, cela prouve que $u_k \longrightarrow \widehat{U} = MG(x,t)$ aussi dans le cas général.

Enfin, pour les données signées, il suffit de séparer $u_0 = u_0^+ - u_0^-$, de résoudre indépendamment les deux problèmes associés, et de soustraire les solutions.

Dans les deux cas, on a montré que $\widehat{U}(x,t)$ est la solution fondamentale centrée en 0 à masse M, c'est-à-dire $\widehat{U}(x,t) = M, G_t(x)$.

(i) À ce stade, nous avons établi que la suite des solutions rescalées $u_k(x,t) := k^N u(kx, k^2 t)$ converge localement vers la solution fondamentale. Plus précisément, à temps fixé $t = 1$, on a

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} u_k(x,1) = M\,G(x,1),$$

et cette convergence a lieu dans $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leqslant p < \infty$. Grâce à l'analyse de la queue (cf. Étape 4), nous savons que la masse est uniformément concentrée, ce qui permet de conclure que cette convergence se propage à l'ensemble de l'espace :

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \|u_k(\cdot,1) - MG(\cdot,1)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

Par ailleurs, les estimations uniformes (comme $|u_k(x,t)| \leqslant CG(x, t+k^{-2})$) impliquent également un contrôle en norme L^∞. En effet, puisque $G(x,t) \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ pour tout $t > 0$, on obtient une convergence également dans cette norme :

$$\lim_{k\longrightarrow\infty} \|u_k(\cdot,1) - MG(\cdot,1)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0.$$

(ii) Pour revenir à l'échelle d'origine, nous utilisons l'interprétation explicite du changement de variable $\mathcal{T}_k$, avec $k = \sqrt{t_1}$. On observe que

$$u_k(x,1) = k^N u(kx, k^2) = t_1^{N/2} u(x\sqrt{t_1}, t_1),$$

ce qui signifie que

$$\lim_{t_1\longrightarrow\infty} t_1^{N/2} u(x\sqrt{t_1}, t_1) = M\,G(x,1),$$

avec convergence dans les normes $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $p \in [1,\infty]$. En posant maintenant $x = y/\sqrt{t_1}$, on retrouve l'énoncé classique du comportement asymptotique de la solution :

$$\lim_{t_1\longrightarrow\infty} \|u(\cdot,t_1) - MG(\cdot,t_1)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

puisque

$$G_{t_1}(y) = t_1^{-N/2} G_1\left(\frac{y}{\sqrt{t_1}}\right).$$

Autrement dit, la solution $u(x,t)$ se comporte asymptotiquement comme la gaussienne de masse M, selon la loi de diffusion de la chaleur. On obtient ainsi le résultat voulu :

$$u(x,t) \sim M\,G(x,t) \quad \text{dans } L^p(\mathbb{R}^N), \quad \text{lorsque } t \longrightarrow \infty.$$

Cette méthode illustre comment la mise à l'échelle, combinée au contrôle des queues et à la compacité fonctionnelle, conduit naturellement à la convergence des solutions de l'équation de la chaleur vers le profil gaussien.

CHAPITRE 4

Taux de convergence et contre-exemples

4.1 Convergence asymptotique vers la gaussienne par la représentation

La deuxième preuve que nous proposons du résultat principal (Théorème 3.1.2), repose sur l'examen de l'erreur en termes de la formule de représentation. Il s'agit d'une approche très directe, mais elle nécessite une étape préalable, où la preuve est effectuée sous la restriction supplémentaire que les données possèdent un premier moment fini. Dans ce cas, le résultat de convergence est plus précis et quantitatif. Ce cas particulier présente un intérêt en soi puisqu'il montre l'importance de maîtriser le premier moment d'une distribution de masse. Nous savons déjà que le premier moment est associé à une quantité conservée.

En effet, soit $u(x,t)$ la solution de l'équation de la chaleur avec donnée initiale u_0. Le premier moment de u s'écrit :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} x\,u(x,t)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^N} x\left(\int_{\mathbb{R}^N} G(x-y,t)u_0(y)\,dy\right)dx \\
\textit{[Fubini]} \quad &= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\left(\int_{\mathbb{R}^N} x\,G(x-y,t)\,dx\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\left(\int_{\mathbb{R}^N} (y+z)G(z,t)\,dz\right)dy \quad (z=x-y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\left(y\underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} G(z,t)}_{=1}\,dz + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} z\,G(z,t)\,dz}_{(\star)=0}\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} yu_0(y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$(\star) = 0$ *puisque la fonction* $z \mapsto z\,G(z,t)$ *est impaire, du fait que* G *est une fonction radiale.*

Ainsi, le premier moment est conservé au cours du temps.

Théorème 4.1.1 (C.f [7]) *Sous les hypothèses que* $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *et que le premier moment absolu est fini*

$$\mathcal{N}_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)y|\,dy < \infty\,, \tag{4.1}$$

on obtient la convergence

$$t^{N/2}|u(x,t) - MG_t(x)| \leqslant C\mathcal{N}_1 t^{-1/2}, \tag{4.2}$$

ainsi que

$$\|u(x,t) - MG_t(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\mathcal{N}_1 t^{-1/2}. \tag{4.3}$$

Le taux $O(t^{-1/2})$ est optimal sous de telles hypothèses.

Preuve. (i) Sans perte de généralité, supposons que $u_0 \geqslant 0$. Pour une solution signée, il suffit de séparer les parties positive et négative des données et d'appliquer les résultats à chacune des solutions partielles.

(ii) Prenons d'abord la convergence en norme sup. Nous avons

$$\begin{aligned}
u(x,t) - M\,G_t(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\,G_t(x-y)\,dy - G_t(x)\int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\,\big(G_t(x-y) - G_t(x)\big)\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\left(\int_0^1 \partial_s\big[G_t(x-sy)\big]\,ds\right) dy \\
&\overset{(\star)}{=} C\,t^{-\frac{N}{2}}\int_{\mathbb{R}^N} dy \int_0^1 ds\; u_0(y)\left\langle y, \frac{x-sy}{2t}\right\rangle e^{-\frac{|x-sy|^2}{4t}} \\
&= \tfrac{1}{2}\,C\,t^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)}\int_{\mathbb{R}^N} dy \int_0^1 ds\; u_0(y)\left\langle y, \frac{x-sy}{\sqrt{t}}\right\rangle \exp\Big(-\tfrac{1}{4}\big|\tfrac{x-sy}{\sqrt{t}}\big|^2\Big),
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
|u(x,t) - M\,G_t(x)| &\leqslant \tfrac{1}{2}\,C\,t^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)}\int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)\,y|\,\left(\sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} |\xi|\,e^{-|\xi|^2/4}\right)\int_0^1 ds\,dy \\
&= \tfrac{1}{2}\,C\,K_0\,t^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)}\int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)\,y|\,dy \\
&\overset{(\star\star)}{=} C_1\,\mathcal{N}_1\,t^{-\left(\frac{1}{2}+\frac{N}{2}\right)}
\end{aligned}$$

En multipliant par $t^{N/2}$, on obtient

$$t^{N/2}\,|u(x,t) - M\,G_t(x)| \;\leqslant\; C_1\,\mathcal{N}_1\,t^{-1/2}.$$

avec
$(\star)$ $C = (4\pi)^{-N/2}$
$(\star\star)$ $C_1 = \frac{1}{2}CK_0$

(iii) Pour la convergence en norme L^1, on part de la même façon et l'on obtient

$$u(x,t) - MG_t(x) = C\,t^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_0^1 ds\, u_0(y) \left\langle y, \frac{x-sy}{2t} \right\rangle e^{-(x-sy)^2/4t}.$$

En intégrant, on arrive à

$$\|u(\cdot,t) - MG_t\|_{L^1} \leqslant C\,t^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_0^1 ds\, |u_0(y)\,y|\, \frac{1}{2t} \int_{\mathbb{R}^N} |x-sy|\, e^{-\frac{|x-sy|^2}{4t}}\, dx.$$

Posons

$$I(t) = \frac{1}{2t} \int_{\mathbb{R}^N} |x-sy|\, e^{-\frac{|x-sy|^2}{4t}}\, dx.$$

Effectuons le changement de variable

$$x - sy = \sqrt{t}\,\xi, \quad dx = \left|\det(\sqrt{t}\,I_N)\right| d\xi = t^{\frac{N}{2}}\, d\xi,$$

où $\det(\sqrt{t}\,I_N) = (\sqrt{t})^N = t^{N/2}$ et I_N la matrice identité de taille $N \times N$. On obtient

$$I(t) = \frac{1}{2t}\, t^{\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |\sqrt{t}\,\xi|\, e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}\, d\xi = \frac{t^{\frac{N+1}{2}}}{2t} \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|\, e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}\, d\xi = \tfrac{1}{2}\, K_1\, t^{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}},$$

où

$$K_1 = \int_{\mathbb{R}^N} |\xi|\, e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}\, d\xi < \infty.$$

En reportant,

$$\|u(\cdot,t) - MG_t\|_{L^1} \leqslant C\,t^{-\frac{N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)|\,|y|\, \left[\tfrac{1}{2}\, K_1\, t^{\frac{N}{2}-\frac{1}{2}}\right] dy = \tfrac{1}{2}\, C\, K_1\, t^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)|\,|y|\, dy.$$

En posant $C_2 = \frac{1}{2}\, C\, K_1$, on conclut

$$\|u(\cdot,t) - MG_t\|_{L^1} \leqslant C_2\, \mathcal{N}_1\, t^{-\frac{1}{2}}.$$

■

Remarque 5
Le théorème illustre qu'en temps long, toute solution de l'équation de la chaleur avec donnée intégrable et moment d'ordre 1 fini tend vers un profil gaussien universel, $MG_t(x)$, indépendamment de la forme précise de la donnée initiale.

Considérons pour solution la gaussienne après un déplacement spatial, $u(x,t) = G(x+h,t)$, et montrons que le taux de convergence est exactement $O(t^{-1/2})$.
Par un développement de Taylor, on obtient :

$$G(x+h,t) = G_t(x) + h\partial_x G_t(x) + \frac{h^2}{2} D_x^2 G_t(\xi)$$

où $\xi = x + sh$ et $0 < s < 1$.
Pour $i = 1, \ldots, N$, on a :

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} G_t(x) &= \partial_{x_i} \left((4\pi t)^{-N/2} \exp\left\{ -\frac{|x|^2}{4t} \right\} \right) \\ &= -(4\pi t)^{-N/2} \frac{x_i}{2t} \exp\left\{ -\frac{|x|^2}{4t} \right\} \end{aligned}$$

Donc

$$\partial_x G_t(x) = -(4\pi t)^{-N/2} \frac{x}{2t} \exp\left\{ -\frac{|x|^2}{4t} \right\}$$

En faisant le changement $\xi = \frac{x}{\sqrt{t}}$, on a :

$$\begin{aligned} \partial_x G_t(x) &= -(4\pi t)^{-N/2} \frac{x}{2t} \exp\left\{ -\frac{|x|^2}{4t} \right\} \\ &= C t^{-(N+1)/2} \xi e^{-\xi^2/4} = O(t^{-(N+1)/2}) \end{aligned}$$

où $C = -\frac{1}{2}(4\pi)^{N/2}$.
En dérivant à nouveau par rapport à x_j, on obtient :

$$\partial^2_{x_i x_j} G(x,t) = \begin{cases} \left(\frac{x_i^2}{4t^2} - \frac{1}{2t} \right) G(x,t), & \text{si } i = j, \\ \frac{x_i x_j}{4t^2} G(x,t), & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

On peut réécrire cela de manière matricielle :

$$D^2_x G(x,t) = G(x,t) \left(\frac{x \otimes x}{4t^2} - \frac{I_N}{2t} \right),$$

où $x \otimes x$ est le produit tensoriel du vecteur x avec lui-même, et I_N la matrice identité de taille N.

Remarquons que, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, la fonction $|x|^2 \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$ est bornée par une constante multiple de t, puisque la fonction $r^2 e^{-r^2/(4t)}$ est bornée uniformément en $r \in \mathbb{R}$. En effet, cette expression admet un maximum pour $|x| \sim \sqrt{t}$.

Ainsi, on obtient les estimations suivantes :

$$\frac{x_i x_j}{t^2} G(x,t) = O\left(\frac{t}{t^2} \cdot t^{-N/2} \right) = O\left(t^{-(N+2)/2} \right),$$

$$\frac{1}{t} G(x,t) = O\left(\frac{1}{t} \cdot t^{-N/2} \right) = O\left(t^{-(N+2)/2} \right).$$

D'où

$$D^2_x G(x,t) = O\left(t^{-(N+2)/2} \right) \text{ uniformément en } x \in \mathbb{R}^N.$$

Ceci montre que le terme $h\partial_x G_t(x)$ est le *correcteur précis* avec une erreur relative $O(t^{-1/2})$.

Remarque 6
Le facteur $t^{N/2}$ est le poids approprié pour considérer l'erreur relative. On note que la formule plus précise d'erreur relative

$$\varepsilon_{rel}(t) = \frac{|u(x,t) - G_t(x)|}{G_t(x)} \tag{4.4}$$

n'admet pas de majoration en norme sup, *comme on peut l'observer en choisissant $u(x,t) = G_t(x-h)$ pour une constante h, car alors*

$$\varepsilon_{rel}(t) = |e^{xh/2t} e^{-h^2/4t} - 1|,$$

qui n'est même pas borné. Il est donc satisfaisant que notre forme affaiblie admette une bonne estimation. Il en va de même pour la norme L^1. Ce commentaire vise à montrer que les calculs d'erreur avec les gaussiennes sont délicats en raison de la queue (c'est-à-dire du comportement pour $|x|$ grand).

Preuve.[du Théorème 3.1.2 dans cette approche] Étant donnée une fonction initiale $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ sans aucune hypothèse sur le premier moment, nous procédons par approximation et inégalité triangulaire. Au final, nous obtenons un résultat de convergence, mais moins précis.

Notons u (resp. u_1) la solution de l'équation de la chaleur issue de la donnée initiale u_0 (resp. $u_{0,1}$).

Supposons que u_0 est intégrable de masse M. Pour tout $\delta > 0$, on choisit une fonction $u_{0,1} : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ à support compact telle que

$$\|u_0 - u_{0,1}\|_1 < \delta.$$

Grâce à l'effet $L^1 \longrightarrow L^\infty$ appliqué à la solution $u - u_1$, on sait que pour tout $t > 0$, il existe $C > 0$ tel que

$$\|u(t) - u_1(t)\|_\infty < C\,\delta\, t^{-N/2}.$$

D'autre part, on sait aussi que pour des données à moment fini :

$$\|u_1(t) - M_1 G_t\|_\infty \leqslant C\mathcal{N}_{1\delta}\, t^{-(N+1)/2}.$$

avec

$$\mathcal{N}_{1,\delta} := \|u_{0,1}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} |x|\,|u_{0,1}(x)|\,\mathrm{d}x.$$

En multipliant par $t^{N/2}$ on obtient

$$t^{N/2}\,\|u_1(t) - M_1\,G_t\|_{L^\infty} \leqslant C\,\mathcal{N}_{1,\delta}\,t^{-1/2}.$$

Puisque $\mathcal{N}_{1,\delta}$ est fixe pour une donnée approchée $u_{0,1}$, on peut choisir $T > 0$ tel que,

pour tout $t \geqslant T$,

$$\mathcal{N}_{1,\delta}\, t^{-1/2} \;\leqslant\; \delta \quad \Longrightarrow \quad t^{N/2}\, \|u_1(t) - M_1\, G_t\|_{L^\infty} \;\leqslant\; C\,\delta.$$

Rappelons que $|M - M_1| \leqslant \delta$. En combinant ces trois inégalités et en utilisant l'inégalité triangulaire

$$u(t) - M\, G_t = \big[u(t) - u_1(t)\big] + \big[u_1(t) - M_1\, G_t\big] + \big[(M_1 - M)\, G_t\big],$$

on obtient pour tout $t \geqslant T$:

$$\|u(t) - M\, G_t\|_{L^\infty} \;\leqslant\; C\,\delta\, t^{-N/2} + C\,\delta\, t^{-N/2} + \delta\; C\, t^{-N/2} \;=\; 3C\,\delta\, t^{-N/2}.$$

En multipliant par $t^{N/2}$ et en faisant tendre $\delta \longrightarrow 0$, il suit

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} t^{N/2}\, \|u(t) - M\, G_t\|_{L^\infty} = 0.$$

■

Remarque 7
Le théorème 3.1.2 montre que pour toute donnée initiale $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, la solution de la chaleur converge vers la gaussienne.

Cependant, sans hypothèse supplémentaire (moment fini, support compact, etc.), on ne peut pas préciser à quelle vitesse cette convergence se produit. Autrement dit, on sait que l'erreur tend vers zéro, mais on ne peut pas dire si elle décroît comme $t^{-1/2}$, t^{-1} ou plus lentement.

Dans la section suivante, nous montrerons qu'aucune vitesse de convergence ne peut être trouvée sans information supplémentaire sur les données autres que leur intégrabilité.

4.1.1 Absence de vitesses explicites pour des données générales. Contre-exemple

Expliquons comment l'absence de vitesse pour la classe entière des fonctions L^1 est démontrée. Pour toute fonction taux décroissante et positive ϕ telle que $\phi(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$, on construit une modification du noyau gaussien qui produit une solution de même masse $M = 1$ et telle qu'elle satisfait une minoration de l'erreur de la forme

$$t^{N/2}\|u(x,t) - G_t(x)\|_\infty \geqslant n\phi(t_n)$$

sur une suite de temps $t_n \longrightarrow \infty$ à choisir.
Construction. L'idée est de choisir de petites masses $m_1, m_2, \ldots$ avec $\sum_n m_n = \delta < 1$, et des emplacements x_n tels que $|x_n| = r_n \longrightarrow \infty$, puis de considérer la solution

$$u(x,t) = (1-\delta)G_t(x) + \sum_{n=1}^{\infty} m_n G_t(x - x_n).$$

Le calcul de l'erreur $u(x,t) - G_t(x)$ en $x = 0$ donne

$$(4\pi t)^{N/2}|u(0,t) - G_t(0)| = |\delta - \sum_{n=1}^{\infty} m_n e^{-x_n^2/4t}| = \sum_{n=1}^{\infty} m_n(1 - e^{-x_n^2/4t}).$$

Prenons $m_n = 2^{-n}$ (toute autre série sommable convient). Choisissons itérativement t_n et x_n comme suit :
Après avoir fixé les étapes $1, 2, \ldots, n-1$, on prend $t_n \gg t_{n-1}$ tel que $\phi(t_n) \leqslant m_n/2n$. C'est ici que l'on utilise le fait que $\phi(t) \longrightarrow 0$, même si elle décroît très lentement. On choisit ensuite $|x_n| = r_n$ si grand que $e^{-r_n^2/4t_n} < 1/2$. Essentiellement, la masse doit être déplacée à une distance de l'ordre de $O(t_n^{1/2})$. Alors,

$$m_n(1 - e^{-x_n^2/4t_n}) \geqslant n\phi(t_n).$$

Ainsi, pour la suite t_n, l'erreur satisfaira

$$t_n^{N/2}\,\|u(t_n) - G_{t_n}\|_\infty \;\geqslant\; n\,\phi(t_n) \;\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{}\; \infty,$$

ce qui contredit l'existence d'une borne $\phi(t)$ valable pour tous les u_0.

Plus loin prenons par exemple $\phi(t) = t^{-\varepsilon}$. Choisissons $m_n = 2^{-n}$. Alors

$$t_n^{\varepsilon} \geqslant 2^n,$$

$$t_n \sim 2^{n/\varepsilon}, \qquad r_n \sim 2^{n/(2\varepsilon)},$$

et la masse dans la région extérieure $\{|x| \geqslant r_n\}$ est approximativement 2^{-n} ; par conséquent, une telle masse vaut

$$M(r) \sim r^{-2\varepsilon},$$

ce qui n'est pas si petit si $\varepsilon \longrightarrow 0$.

4.1.2 Propagation infinie dans l'espace

La formule de représentation montre immédiatement qu'une solution u correspondant à des données initiales non négatives sera strictement positive en tout point $x \in \mathbb{R}^N$ pour tout temps $t > 0$. La propagation à vitesse infinie de l'équation de la chaleur avec la formation instantanée d'une queue fine à l'infini est considérée par plusieurs auteurs comme une propriété non physique, l'un des rares inconvénients de cette merveilleuse équation. Cependant, elle est essentielle pour l'équation et crée quelques effets curieux.

Commentaire. – La chaleur se propage instantanément partout, même à distance infinie.

Si on chauffe une région localisée (par exemple, autour de $x = 0$), la solution $u(x,t)$ est déjà positive partout dans l'espace dès le premier instant $t > 0$, même très loin de la zone initialement chaude. Cela est dû au fait que la gaussienne G est strictement positive sur tout $\mathbb{R}^N$, avec une décroissance exponentielle mais jamais égale à zéro.

La « queue fine » désigne cette partie de la solution très loin de la région initiale. Elle est très petite (exponentiellement petite en x) mais non nulle. Elle apparaît instantanément pour tout $t > 0$.

• **Effet 1 : Comportement des queues spatiales pour les solutions positives.**

Examinons la forme précise de la queue dans le cas le plus simple où u_0 a un support compact. Par commodité et sans perte de généralité, supposons que u_0 est à support compacte dans la boule B_R de rayon $R > 0$ centrée en $x = 0$. Prenons $x_1 \in \mathbb{R}^N$ tel que $|x_1| = r_1 > 1$, par exemple $x_1 = r_1\mathbf{e}_1$. La formule de représentation implique qu'une borne supérieure est obtenue en déplaçant toute la masse au point le plus proche de x_1 dans $\overline{B_R}$, qui est $x_0' = R\mathbf{e}_1$, d'où

$$u(x_1, t) \leqslant M\, G_t(x_1 - x_0') = \frac{M}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-(|x_1|-R)^2/4t}.$$

Dans l'autre sens, en déplaçant toute la masse en $x_0'' = -R\mathbf{e}_1$, on obtient la minoration

$$u(x_1, t) \geqslant M\, G_t(x_1 - x_0'') = \frac{M}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-(|x_1|+R)^2/4t}.$$

Comme l'équation est invariante par rotations, le résultat vaut pour tout x tel que $|x| > R$ et non seulement pour notre choix restreint de x_1. De plus, on voit que le rapport des deux estimations tend vers l'infini lorsque $|x| \longrightarrow \infty$. Il est donc commode de prendre des logarithmes, puis on obtient dans la proposition suivante une formule générale lorsque B_R est centrée en x_c avec $|x_c| = R_c$.

Proposition 4.1.2 (C.f [7])
Soit u_0 à support compacte dans la boule $B_R(x_c)$ et $M = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,dx$. Alors pour tout $t > 0$ et tout $x \notin B_R(x_c)$,

(4.5)
$$\frac{N}{2}\log(4\pi t) + \frac{1}{4t}(|x - x_c| - R)^2 \leqslant -\log(u(x,t)/M) \leqslant \frac{N}{2}\log(4\pi t) + \frac{1}{4t}(|x - x_c| + R)^2.$$

Il s'ensuit que

(4.6)
$$\lim_{|x|\longrightarrow\infty} \frac{\log(u(x,t)/M)}{|x|^2} = -\frac{1}{4t}.$$

Preuve. Soit $u_0 \geqslant 0$ à support compact contenu dans $B_R(x_c)$ et $M = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,dx$. Pour $t > 0$, la solution de l'équation de la chaleur s'écrit

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x - y, t)\, u_0(y)\, dy, \qquad G(z,t) = (4\pi t)^{-N/2}\, e^{-\frac{|z|^2}{4t}}.$$

Fixons $x \notin B_R(x_c)$ et posons $d := |x - x_c| > R$. Pour tout $y \in B_R(x_c)$ on a, par inégalité

triangulaire,

$$d - R \leqslant |x - y| \leqslant d + R.$$

La fonction $r \mapsto G_r := (4\pi t)^{-N/2} e^{-\frac{r^2}{4t}}$ est strictement décroissante sur $[0, \infty)$. Il en résulte, pour tout $y \in B_R(x_c)$,

$$(4\pi t)^{-N/2} e^{-\frac{(d+R)^2}{4t}} \leqslant G(x-y,t) \leqslant (4\pi t)^{-N/2} e^{-\frac{(d-R)^2}{4t}}.$$

En multipliant par $u_0(y) \geqslant 0$ et en intégrant sur $B_R(x_c)$, on obtient

$$\frac{M}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{(d+R)^2}{4t}} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{M}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{(d-R)^2}{4t}}.$$

En prenant $-\log(\cdot/M)$, ceci équivaut à

$$\frac{N}{2}\log(4\pi t) + \frac{(d-R)^2}{4t} \leqslant -\log\big(u(x,t)/M\big) \leqslant \frac{N}{2}\log(4\pi t) + \frac{(d+R)^2}{4t},$$

c'est-à-dire, puisque $d = |x - x_c|$,

$$\frac{N}{2}\log(4\pi t) + \frac{1}{4t}\big(|x-x_c| - R\big)^2 \leqslant -\log\big(u(x,t)/M\big) \leqslant \frac{N}{2}\log(4\pi t) + \frac{1}{4t}\big(|x-x_c| + R\big)^2.$$

Pour la limite, divisons ces inégalités par $|x|^2$ et prenons $|x| \longrightarrow \infty$. On a $|x - x_c| = |x| + O(1)$, donc

$$\frac{\big(|x-x_c| \pm R\big)^2}{|x|^2} \longrightarrow 1, \qquad \frac{\log(4\pi t)}{|x|^2} \longrightarrow 0.$$

Par le théorème des Gendarmes, on obtient

$$\lim_{|x| \longrightarrow \infty} \frac{\log\big(u(x,t)/M\big)}{|x|^2} = -\frac{1}{4t}.$$

Cela conclut la preuve.

Exemple 1 — Queue spatiale pour une donnée exponentielle

On considère la solution de l'équation de la chaleur en dimension $N = 1$ avec une donnée initiale de type exponentielle. Plus précisément, soit la donnée initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Cette fonction est continue, positive, et appartient à $L^1(\mathbb{R})$, donc la solution $u(x,t)$ de l'équation de la chaleur avec cette donnée est donnée par la formule de convolution :

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2/(4t)} e^{-y}\, dy.$$

Nous voulons étudier le comportement de $u(x,t)$ lorsque $x \longrightarrow +\infty$, et montrer que cette solution a une *queue exponentielle*. Plus précisément, nous allons démontrer que

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} e^x u(x,t) = e^t.$$

On a :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{y=0}^{+\infty} e^{-(x-y)^2/(4t)} e^{-y}\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{z=-x+2t}^{+\infty} e^{-z^2/(4t)} e^{-x+2t-z}\, dz. \text{ avec } z = y - x + 2t \\ &= \frac{e^{-x+2t}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-x+2t}^{+\infty} e^{-z^2/(4t)-z}\, dz. \end{aligned}$$

Comme

$$-\frac{z^2}{4t} - z = -\frac{1}{4t}(z^2 + 4tz) = -\frac{1}{4t}\left(z^2 + 4tz + 4t^2 - 4t^2\right) = -\frac{(z+2t)^2}{4t} + t.$$

Alors, il vient que :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{e^{t-x}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-x+2t}^{+\infty} e^{-(z+2t)^2/(4t)}\, dz. \\ &= \frac{e^{t-x}}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-x+4t}^{+\infty} e^{-w^2/(4t)}\, dw \text{ avec } w = z + 2t \\ &= \frac{e^{t-x}}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{-x+4t}{2\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\xi^2}\, d\xi \text{ avec } \xi = \frac{w}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{e^{t-x}}{2}\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{4t-x}{2\sqrt{t}}\right)\right] \text{ (voir la section 1.4 pour la fonction erf)} \end{aligned}$$

Lorsque $x \longrightarrow +\infty$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{4t-x}{2\sqrt{t}} \longrightarrow -\infty &\implies \operatorname{erf}\left(\frac{24t-x}{2\sqrt{t}}\right) \longrightarrow -1 \\ &\implies 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{24t-x}{2\sqrt{t}}\right) \longrightarrow 2 \\ &\implies u(x,t) \sim \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^{t-x} = e^{t-x} \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} e^x u(x,t) = e^t.$$

La solution $u(x,t)$ associée à une donnée initiale exponentielle $u_0(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x\geqslant 0}$ possède une queue spatiale de type exponentielle simple :

$$u(x,t) \sim e^{t-x} \quad \text{lorsque } x \longrightarrow +\infty.$$

Ceci contraste avec le comportement gaussien universel $\sim e^{-|x|^2/(4t)}$ pour des données à support compact. On voit que la décroissance spatiale de la solution dépend

fortement de la décroissance des données initiales.

■

• **Effet 2 : Les solutions signées ne deviennent pas partout positives.**

Le comportement à queue exponentielle carrée de la solution fondamentale a d'autres conséquences curieuses. Ainsi, si une solution signée $u(x,t)$ a des données initiales telles que la masse de la partie positive $M_+ = \int u_0^+(x)dx$ est plus grande que la masse de la partie négative $M_- = \int u_0^-(x)dx$, alors on sait qu'elle converge lorsque $t \longrightarrow \infty$ vers la gaussienne positive MG_t avec $M = M_+ - M_- > 0$ de sorte que

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} t^{N/2}u(x,t) = (4\pi)^{-N/2}\,M > 0 \tag{4.7}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Il serait naturel de penser que lorsque M_+ est beaucoup plus grand que M_-, alors la solution u devient effectivement positive partout pour les grands temps. Or, c'est vrai sur la majeure partie de l'espace en raison de la convergence précédente, mais ce n'est pas vrai partout.

Exemple 2 — Les solutions signées ne deviennent pas partout positives

Nous étudions le comportement en temps long des solutions *signées* de l'équation de la chaleur, c'est-à-dire des solutions dont la donnée initiale u_0 change de signe. Bien que la solution converge globalement vers une gaussienne positive si la masse totale $M = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)\,dx$ est strictement positive, cela ne signifie pas qu'elle devient positive en tout point de l'espace.

(i) Cas distributionnel : combinaison de deux Dirac

Considérons l'équation de la chaleur en dimension $N = 1$ avec la donnée initiale suivante :

$$u_0(x) = \delta(x) - \varepsilon\delta(x-1), \quad \text{où } 0 < \varepsilon < 1.$$

La masse totale est donc $M = 1 - \varepsilon > 0$.
La solution est donnée par :

$$u(x,t) = G_t(x) - \varepsilon G_t(x-1),$$

On cherche la position $x = r(t)$ telle que $u(r(t),t) = 0$.

$$\begin{aligned}
u(x,t) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad G_t(r(t)) = \varepsilon G_t(r(t)-1). \\
&\Longrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-r(t)^2/(4t)} = \varepsilon\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-(r(t)-1)^2/(4t)} \\
&\Longrightarrow \quad -\frac{r(t)^2}{4t} = \log\varepsilon - \frac{(r(t)-1)^2}{4t} \\
&\Longrightarrow \quad -\frac{r(t)^2}{4t} = \log\varepsilon - \frac{r(t)^2 - 2r(t) + 1}{4t}
\end{aligned}$$

$$\implies \frac{-2r(t)+1}{4t} = \log\varepsilon$$
$$\implies r(t) = \frac{1}{2} - 2t\log\varepsilon$$

Puisque $\varepsilon < 1$, on a $\log\varepsilon < 0$, donc $r(t) \longrightarrow +\infty$ quand $t \longrightarrow \infty$.

Il en résulte que :

$$\begin{cases} u(x,t) > 0 & \text{si } x < r(t), \\ u(x,t) < 0 & \text{si } x > r(t). \end{cases}$$

Pour t grand, $r(t) \approx 2t\ln(1/\varepsilon)$ (le terme $1/2$ est négligeable).

Ce résultat montre que l'anomalie survient dans la queue lointaine : les contributions négatives, bien que de masse plus petite, l'emportent asymptotiquement dans la direction $x \longrightarrow +\infty$.

(ii) Cas fonctionnel avec données intégrables

Considérons maintenant une donnée initiale plus régulière :

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x < 0, \\ 0, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\varepsilon, & \text{si } x > 1, \end{cases} \quad \text{avec } \varepsilon > 0.$$

C'est une fonction intégrable, bornée, signée.
La solution est donnée par :

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{0} G_t(x-y)\,dy - \varepsilon\int_{1}^{\infty} G_t(x-y)\,dy.$$

Étudions $u(x,t)$ lorsque $x \gg 1$, plus précisément lorsque $x > r(t)$ pour un certain $r(t)$ à déterminer. Dans cette région :

(*i*) Le noyau $G_t(x-y)$ est très petit pour $y \leqslant 0$ car $x - y \gg 0$, donc la première intégrale est négligeable ;

(*ii*) En revanche, le noyau est centré autour de $y \approx x$, donc la seconde intégrale est proche de ε.

Pour $x > 1 + \rho$, on a :

$$u(x,t) \leqslant \int_{-\infty}^{0} G_t(x-y)\,dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{0} e^{-(x-y)^2/(4t)}\,dy.$$

Posons $z = x - y$, alors $dy = -dz$, $y = 0 \Rightarrow z = x$, et on obtient :

$$\int_{-\infty}^{0} G_t(x-y)\,dy = \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-z^2/(4t)}\,dz.$$

Cette intégrale est exponentiellement petite quand $x \gg \sqrt{t}$.
En revanche,

$$\int_1^\infty G_t(x-y)\,dy = \int_{-\infty}^{x-1} G_t(z)\,dz \approx 1.$$

Donc :

$$u(x,t) \approx 0 - \varepsilon \cdot 1 = -\varepsilon < 0,$$

ce qui montre que $u(x,t) < 0$ pour x assez grand.

On montre de même que $u(x,t) < 0$ pour $x > 2t\log(1/\varepsilon) + \frac{1}{2}$ en suivant un raisonnement similaire au point (i).

(iii) Cas en dimension $N \geqslant 2$

Un phénomène analogue se produit en $N > 1$. On considère par exemple un dipôle formé par deux masses de signe opposé séparées d'une petite distance. La solution reste positive dans un certain cône autour de l'origine et devient négative suffisamment loin dans la direction correspondant à la masse négative. Le changement de signe se produit alors sur une «frontière» qui s'éloigne en $|x| \sim O(t)$. En général, pour des données signées à support positif fini et négatif fini, on montre que $u(x,t)$ garde le signe de la masse dominante pour $|x| \leqslant C\sqrt{t}$, mais dans les directions lointaines opposées à la masse dominante on observe un signe contraire avec un seuil croissant linéairement en t . Les calculs se font de façon similaire en utilisant le noyau gaussien radiellement. ■

Commentaire. Pour des données positives à support compact, la queue spatiale est d'ordre gaussien $\exp(-|x|^2/(4t))$.

Pour des solutions signées, même si la masse totale nette est positive, la solution peut rester négative dans les régions lointaines opposées à la plus grande masse, avec un seuil $x = r(t) \sim 2t\ln(1/\varepsilon)$ en $1D$.

Ce phénomène montre que la convergence en norme uniforme ne peut pas être globale sans hypothèses supplémentaires sur le signe des données.

4.2 Taux de convergence sous condition de moments

De meilleurs taux de convergence peuvent être obtenus en supposant une meilleure décroissance à l'infini de u_0. La condition technique que nous utilisons est la finitude du second moment, une condition très répandue dans la littérature. En probabilité, cela correspond à une variation finie. L'exemple motivant est décrit ci-dessous.

Considérons pour un $t_0 > 0$ fixé, $u(x,t) = G(x,t+t_0)$. Alors, lorsque $t \longrightarrow +\infty$,

$$t^{N/2}\big|u(x,t) - G(x,t)\big| = O\big(t^{-1}\big)$$

En effet,

$$u(x,t) - G(x,t) = G(x,t)\Big[\Big(\frac{t}{t+t_0}\Big)^{N/2} \exp\Big\{-\frac{|x|^2}{4}\left(\frac{1}{t+t_0} - \frac{1}{t}\right)\Big\} - 1\Big].$$

En développant en série de Taylor pour $t \longrightarrow \infty$, $(t/(t+t_0))^{N/2} = 1 - \frac{N\,t_0}{2t} + O(t^{-2})$, et $\frac{1}{t+t_0} - \frac{1}{t} = -\frac{t_0}{t^2} + O(t^{-3})$, on obtient

$$u(x,t) - G(x,t) = -\frac{N\,t_0}{2}\,\frac{G(x,t)}{t} + O\Big(\frac{G(x,t)}{t^2}\Big).$$

Comme $G(x,t) \leqslant Ct^{-N/2}$, (avec $C \geqslant 0$), il suit

$$t^{N/2}|u(x,t) - G(x,t)| \leqslant C\,t^{-1},$$

Le résultat que nous démontrons est le suivant.

Théorème 4.2.1 *Sous les hypothèses que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et que le premier moment signé*

$$\mathcal{N}_{1,i} = \int_{\mathbb{R}^N} y_i\,u_0(y)\,dy \tag{4.8}$$

est fini (pour toutes les coordonnées), ainsi que le second moment :

$$\mathcal{N}_2 = \int_{\mathbb{R}^N} |y|^2\,|u_0|(y)\,dy < \infty, \tag{4.9}$$

nous obtenons la convergence

$$t^{N/2}|u(x,t) - M\,G_t(x) + \sum_i \mathcal{N}_{1,i}\,\partial_{x_i}G_t(x)| \leqslant C\mathcal{N}_2\,t^{-1}\,, \tag{4.10}$$

et

$$\|u(x,t) - M\,G_t(x) + \sum_i \mathcal{N}_{1,i}\,\partial_{x_i}G_t(x)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leqslant C\,\mathcal{N}_2\,t^{-1}\,. \tag{4.11}$$

Le taux $O(t^{-1})$ est optimal sous de telles hypothèses.

Remarque. Le premier moment signé est appelé en mécanique le centre de masse. Pour $M \neq 1$, $M \neq 0$, on utilise la formule

$$x_c = \frac{1}{M}\int x\,u_0(x)dx\,. \tag{4.12}$$

En probabilité, c'est la position moyenne de l'échantillon et $M = 1$. Lorsque x_c est fini et $M \neq 0$, le centre de masse peut être réduit à zéro simplement par un déplacement de l'axe spatial. Cela simplifie considérablement les formules (4.10), (4.11), voir ci-dessous.

Preuve. (i) En procédant comme dans le Théorème 4.1.1, nous obtenons la formule

$$D := u(x,t) - MG_t(x) = (4\pi t)^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N}\left(e^{-|x-y|^2/4t} - e^{-|x|^2/4t}\right)\,u_0(y)\,dy.$$

Considérons la fonction 1D $f(s) = e^{-|x-sy|^2/4t}$, $s \in \mathbb{R}$, et utilisons la formule de Taylor :

$$f(1) = f(0) + f'(0) + \int_0^1 f''(s)(1-s)\,ds\,.$$

On a

$$f'(s) = \frac{1}{2t}\langle y, x-sy\rangle e^{-|x-sy|^2/4t}, \quad f''(s) = (-\frac{1}{2t}|y|^2 + \frac{1}{4t^2}|\langle y, x-sy\rangle|^2)e^{-|x-sy|^2/4t}\,.$$

En utilisant ces résultats, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
D &= (4\pi t)^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{2t}\langle y,\, x\rangle e^{-|x|^2/4t}\right. \\
&\quad \left. + \int_0^1\left(-\frac{1}{2t}|y|^2 + \frac{1}{4t^2}|\langle y, x-sy\rangle|^2\right)e^{-|x-sy|^2/4t}\mathrm{d}s\right]u_0(y)\,dy \\
&= \underbrace{(4\pi t)^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{2t}\langle y,\, x\rangle e^{-|x|^2/4t}\,u_0(y)\,dy}_{=:D_1} \\
&\quad + \underbrace{(4\pi t)^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N}u_0(y)\mathrm{d}y\int_0^1\left(-\frac{1}{2t}|y|^2 + \frac{1}{4t^2}|\langle y, x-sy\rangle|^2\right)e^{-|x-sy|^2/4t}\mathrm{d}s}_{:=D_2} \\
&= D_1 + D_2
\end{aligned}$$

Sachant que $\partial_i G = (4\pi t)^{-(N)/2}\frac{x_i}{2t^{1/2}}e^{-|x|^2/4t}$, on a :

$$\begin{aligned}
D_1 &= (4\pi t)^{-(N+1)/2}\int_{\mathbb{R}^N}u_0(y)\langle y, \frac{x}{2t^{1/2}}\rangle e^{-|x|^2/4t}\,dy \\
&= (4\pi t)^{-(N)/2}\int_{\mathbb{R}^N}u_0(y)\sum_i y_i\frac{x_i}{2t^{1/2}}e^{-|x|^2/4t}\,dy \\
&= \sum_i(4\pi t)^{-(N)/2}\int_{\mathbb{R}^N}u_0(y)y_i\frac{x_i}{2t^{1/2}}e^{-|x|^2/4t}\,dy \\
&= -\sum_i\left(\int_{\mathbb{R}^N}y_i u_0(y)\,dy\right)\partial_i G_t(x) \\
&= -\sum_i \mathcal{N}_{1,i}\,\partial_{x_i}G_t(x)|
\end{aligned}$$

D'autre part, on a aussi

$$\begin{aligned}
D_2 &= (4\pi t)^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N}u_0(y)\mathrm{d}y\int_0^1\left(-\frac{1}{2t}|y|^2 + \frac{1}{t}|\langle y, \frac{x-sy}{2\sqrt{t}}\rangle|^2\right)e^{-|x-sy|^2/4t}\mathrm{d}s \\
&= (4\pi t)^{-(N+2)/2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^1|y|^2u_0(y)\left(-\frac{1}{2} + (\langle\widehat{y},\xi\rangle)^2\right)e^{-\xi^2}\,dyds
\end{aligned}$$

avec $\xi = (x-sy)/2\sqrt{t}$ et $\widehat{y} = y/|y|$

comme le facteur dépendant de ξ est uniformément borné pour tout ξ, alors il existe

$C(N) > 0$ telle que :

$$|D_2| \leqslant C(N) \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\, |y|^2\, dy \right) t^{-(N+2)/2}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} |u(x,t) - M\, G_t(x) + \sum_i \mathcal{N}_{1,i}\, \partial_{x_i} G_t(x)| &= |D_2| \\ &\leqslant C(N) \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_0(y)\, |y|^2\, dy \right) t^{-(N+2)/2} \\ |u(x,t) - M\, G_t(x) + \sum_i \mathcal{N}_{1,i}\, \partial_{x_i} G_t(x)| &\leqslant C(N) \mathcal{N}_2\, t^{-(N+2)/2} \end{aligned}$$

(ii) Partant de la même décomposition

$$u(x,t) - M\, G_t(x) - \sum_{i=1}^{N} \mathcal{N}_{1,i}\, \partial_{x_i} G_t(x) \;=\; D_2(x,t),$$

avec

$$D_2(x,t) = (4\pi t)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} u_0(y) \int_0^1 (1-s) \Big(-\tfrac{|y|^2}{2t} + \tfrac{|\langle y, x-sy\rangle|^2}{4t^2} \Big) e^{-\frac{|x-sy|^2}{4t}}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}y,$$

En appliquant Fubini, on obtient

$$\|D_2(\cdot,t)\|_{L^1} \;\leqslant\; \int_{\mathbb{R}^N} \big|u_0(y)\big| \int_0^1 (1-s) \int_{\mathbb{R}^N} (4\pi t)^{-N/2} \Big| -\tfrac{|y|^2}{2t} + \tfrac{|\langle y, x-sy\rangle|^2}{4t^2} \Big| e^{-\frac{|x-sy|^2}{4t}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}y.$$

Pour chaque $y \in \mathbb{R}^N$ et $s \in [0,1]$, posons $z = x - sy$. Alors $dx = dz$ et la gaussienne $(4\pi t)^{-N/2} e^{-|z|^2/(4t)}$ a intégrale 1 sur $\mathbb{R}^N$. Par ailleurs,

$$|\langle y, x - sy\rangle|^2 = |\langle y, z\rangle|^2 \;\leqslant\; |y|^2\, |z|^2.$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} (4\pi t)^{-N/2} \Big| -\tfrac{|y|^2}{2t} + \tfrac{|\langle y,z\rangle|^2}{4t^2} \Big| e^{-\frac{|z|^2}{4t}}\, \mathrm{d}z \;\leqslant\; \frac{|y|^2}{2t} + \frac{|y|^2}{4t^2} \int_{\mathbb{R}^N} |z|^2\, (4\pi t)^{-N/2} e^{-\frac{|z|^2}{4t}}\, \mathrm{d}z.$$

Grâce au Lemme 2.2.4, on obtient :

$$\int_{\mathbb{R}^N} |z|^2\, (4\pi t)^{-N/2} e^{-\frac{|z|^2}{4t}}\, \mathrm{d}z = 2Nt.$$

Ce qui implique

$$\int_{\mathbb{R}^N} (4\pi t)^{-N/2} \Big| -\tfrac{|y|^2}{2t} + \tfrac{|\langle y,z\rangle|^2}{4t^2} \Big| e^{-\frac{|z|^2}{4t}}\, \mathrm{d}z \;\leqslant\; \frac{|y|^2}{2t} + \frac{|y|^2}{4t^2}\, 2Nt \;=\; |y|^2\, \frac{N+1}{2t}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}\|D_2(\cdot,t)\|_{L^1} &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} |u_0(y)|\,|y|^2 \int_0^1 (1-s)\,\frac{N+1}{2t}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}y = \frac{N+1}{4t}\int_{\mathbb{R}^N} |y|^2\,|u_0(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\leqslant \widetilde{C}(N)\,\mathcal{N}_2\,t^{-1}\end{aligned}$$

avec $C = (N+1)/4$

• **Optimalité du taux $O(t^{-1})$.** Nous montrons qu'on ne peut, en général, pas obtenir un ordre de décroissance meilleur que t^{-1} sous les seules hypothèses de moments du Théorème 4.2.1. Pour cela, il suffit de trouver un exemple de donnée u_0 satisfaisant

$$M = \int_{\mathbb{R}^N} u_0 \neq 0, \quad \mathcal{N}_{1,i} = \int y_i\,u_0(y)\,dy = 0, \quad \mathcal{N}_2 = \int |y|^2\,|u_0(y)|\,dy > 0,$$

et pour lequel l'erreur

$$E(t) := t^{N/2}\big(u(0,t) - M\,G_t(0)\big)$$

décroit précisément comme une constante non nulle fois t^{-1}.

Exemple. Prenons en dimension N la donnée

$$u_0(y) = M\,\delta(y) + \alpha\big(\delta(y-a) + \delta(y+a)\big),$$

avec $a \in \mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ fixé et $\alpha > 0$ choisi tel que la masse totale soit $M_{\text{tot}} = M + 2\alpha \neq 0$. Alors :

$$\int y_i\,u_0(y)\,dy = M\,0 + \alpha(a_i + (-a_i)) = 0,$$

et

$$\mathcal{N}_2 = \int |y|^2\,|u_0(y)|\,dy = |a|^2 \cdot 2\alpha > 0.$$

La solution s'écrit

$$u(x,t) = M\,G_t(x) + \alpha\,G_t(x-a) + \alpha\,G_t(x+a).$$

En $x = 0$,

$$u(0,t) - M\,G_t(0) = \alpha\big(G_t(-a) + G_t(a)\big) = 2\alpha\,G_t(a) = 2\alpha\,(4\pi t)^{-N/2}\exp\Big(-\frac{|a|^2}{4t}\Big).$$

Dès lors,

$$E(t) = t^{N/2}\big(u(0,t) - M\,G_t(0)\big) = 2\alpha\,(4\pi)^{-N/2}\exp\Big(-\tfrac{|a|^2}{4t}\Big).$$

Puisque

$$\exp\Big(-\tfrac{|a|^2}{4t}\Big) = 1 - \frac{|a|^2}{4t} + O(t^{-2}) \quad (t \longrightarrow \infty),$$

on obtient

$$E(t) = 2\alpha\,(4\pi)^{-N/2}\Big(1 - \tfrac{|a|^2}{4t} + O(t^{-2})\Big) \;=\; 2\alpha\,(4\pi)^{-N/2} - \alpha\,(4\pi)^{-N/2}\,\frac{|a|^2}{2}\,t^{-1} + O(t^{-2}).$$

Dès lors, l'erreur complète, qui inclut la correction en dérivée première (ici nulle car

$\mathcal{N}_1 = 0$), vaut

$$t^{N/2}\big(u(0,t) - M_{\text{tot}}\, G_t(0)\big) = 2\alpha\,(4\pi)^{-N/2} - \alpha\,(4\pi)^{-N/2}\,\frac{|a|^2}{2}\,t^{-1} + O(t^{-2}).$$

Le terme constant $2\alpha(4\pi)^{-N/2}$ disparaît si l'on choisit $M_{\text{tot}} = 0$ (en posant $\alpha = -M/2$), mais alors le terme en t^{-1} reste non nul grâce à $\mathcal{N}_2 = 2\alpha|a|^2 > 0$.

Conclusion. Pour cette famille de données, la partie d'erreur non corrigée par la masse et le premier moment décroît exactement comme $C\,t^{-1}$ avec $C \neq 0$. Il est donc impossible, en général, d'obtenir un taux de convergence plus rapide que $O(t^{-1})$ sous les seules hypothèses $\mathcal{N}_1 < \infty$ et $\mathcal{N}_2 < \infty$.

Exemples de distributions à queues polynomiales et moments

On considère en dimension N la famille de densités de probabilité

$$f_a(x) \;=\; C(a)\,\big(1 + |x|^2\big)^{-a}, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

où $C(a)$ est la constante de normalisation. Le comportement à l'infini est

$$f_a(x) \sim C(a)\,|x|^{-2a}.$$

• **Conditions d'existence des moments**

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f_a(x)\,dx < \infty \iff 2a > N.$

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|\,f_a(x)\,dx < \infty \iff 2a > N+1.$

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2\,f_a(x)\,dx < \infty \iff 2a > N+2.$

En particulier, pour $\mathbf{a} = \mathbf{1}$ (i.e la distribution de Cauchy en dimension 1), on a :

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ici $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$, mais $\int |x| f_1(x) = \infty$ et $\int x^2 f_1(x) = \infty$.

Reformulation du résultat du théorème 4.2.1. Il est bien connu que le premier moment peut être éliminé en déplaçant l'origine des coordonnées au centre de masse x_c défini par la formule (4.12) lorsque $M \neq 0$. Si on fait cela et qu'on applique ensuite le Théorème 4.2.1, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 4.2.1.1 (C.f [7])
Sous les hypothèses du Théorème 4.2.1, on a

$$\text{(4.13)} \qquad \begin{cases} |u(x,t) - MG_t(x - x_c)| \leqslant C\,\mathcal{N}_2^*(u_0)\,t^{-(N+2)/2}), \\ \|u(x,t) - MG_t(x - x_c)\|_1 \leqslant C\,\mathcal{N}_2^*(u_0)\,t^{-1}), \end{cases}$$

où $\mathcal{N}_2^*(u_0) = \int_{\mathbb{R}^N} |x - x_c|^2 u_0(x)\,dx$ est le second moment centré.

Preuve. On suppose que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, que la masse $M = \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,dx$ est non nulle, et que le second moment centré

$$\mathcal{N}_2^*(u_0) = \int_{\mathbb{R}^N} |x - x_c|^2\, u_0(x)\,dx$$

est fini, où le centre de masse est défini par

$$x_c = \frac{1}{M}\int_{\mathbb{R}^N} x\, u_0(x)\,dx.$$

On considère alors la densité centrée donnée par

$$v(y,t) = u(y + x_c, t),$$

qui est solution de l'équation de la chaleur avec donnée initiale

$$v_0(y) = u_0(y + x_c).$$

Par construction, cette nouvelle donnée initiale a son centre de masse en 0, c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^N} y\, v_0(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} (x - x_c)\, u_0(x)\,dx = 0.$$

Elle vérifie donc les hypothèses du Théorème 4.2.1 avec $\int y\, v_0(y)\,dy = 0$ et

$$\mathcal{N}_2(v_0) = \int_{\mathbb{R}^N} |y|^2 v_0(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} |x - x_c|^2 u_0(x)\,dx = \mathcal{N}_2^*(u_0).$$

D'après le Théorème 4.2.1 appliqué à v, on a les estimations suivantes :

$$|v(y,t) - MG_t(y)| \leqslant C\,\mathcal{N}_2^*(u_0)\, t^{-(N+2)/2}, \qquad \|v(\cdot,t) - MG_t\|_{L^1} \leqslant C\,\mathcal{N}_2^*(u_0)\, t^{-1}.$$

Par changement de variable $x = y + x_c$, on retrouve les expressions pour u :

$$u(x,t) = v(x - x_c, t), \qquad G_t(x - x_c) = G_t^{x_c}(x),$$

et donc

$$|u(x,t) - MG_t(x - x_c)| = |v(x - x_c, t) - MG_t(x - x_c)| \leqslant C\,\mathcal{N}_2^*(u_0)\, t^{-(N+2)/2},$$

et de même pour la norme L^1 :

$$\|u(\cdot,t) - MG_t(\cdot - x_c)\|_{L^1} = \|v(\cdot,t) - MG_t\|_{L^1} \leqslant C\,\mathcal{N}_2^*(u_0)\, t^{-1}.$$

■

Résultat d'ordre supérieur. Une continuation de cette méthode vers des taux de

convergence plus stricts utilisant des moments d'ordre supérieur peut être faite en prenant plus de termes dans le développement en série de Taylor. Nous ne le ferons pas ici, mais nous citons simplement le résultat que l'on trouve dans [2].

Théorème 4.2.2 ([2]) *Soit $G(x,t)$ le noyau de la chaleur. Pour tout $1 \leqslant p \leqslant N/(N-1)$ et $k \geqslant 0$ entier, la solution du problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur satisfait :*

$$\left\| u(x,t) - \sum_{|\alpha|\leqslant k-j} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \left(\int u_0(x) x^\alpha \, dx \right) D^\alpha G(x,t) \right\|_p \leqslant C_k t^{-(k+1)/2} \left\| |x|^{k+1} u_0(x) \right\|_p,$$

pour toute donnée initiale $u_0 \in L^1\left(\mathbb{R}^N, 1+|x|^k\right)$ telle que $|x|^{k+1}u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Lemme 4.2.3 (Décomposition de f (ordre k avec $j=0$))
Soient $N \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 0$. Supposons que $1 \leqslant p < \frac{N}{N-1}$ et que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N, (1+|x|)^k)$ vérifie $|x|^{k+1}u_0 \in L^p(\mathbb{R}^N)$ ainsi que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\, x^\beta \, dx < \infty \quad \text{pour tout multi-indice } \beta \text{ avec } |\beta| \leqslant k.$$

Alors il existe une famille finie $(F_\alpha)_{|\alpha|=k+1}$ avec $F_\alpha \in L^p(\mathbb{R}^N)$ telle que, au sens des distributions,

$$u_0 = \sum_{|\beta|\leqslant k} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\, x^\beta \, dx \right) D^\beta \delta \; + \sum_{|\alpha|=k+1} D^\alpha F_\alpha,$$

et de plus

$$\sum_{|\alpha|=k+1} \|F_\alpha\|_{L^p} \;\leqslant\; C \, \| |x|^{k+1} u_0 \|_{L^p},$$

où C dépend seulement de N, k et p.

Preuve. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et tout $k \geqslant 0$,

$$\varphi(x) = \sum_{|\beta|\leqslant k} \frac{x^\beta}{\beta!} D^\beta \varphi(0) + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-s)^k D^\alpha \varphi(sx)\, ds. \tag{4.14}$$

En testant f contre φ et en injectant (4.14),

$$\begin{aligned}
\langle u_0, \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \varphi(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x) \left[\sum_{|\beta|\leqslant k} \frac{x^\beta}{\beta!} D^\beta \varphi(0) + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{x^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-s)^k D^\alpha \varphi(sx)\, ds \right] \mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\sum_{|\beta|\leqslant k} \frac{1}{\beta!} \Big(\int u_0(x)\, x^\beta dx \Big) D^\beta \varphi(0)}_{I_1} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=k+1} \frac{1}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 (1-s)^k u_0(x)\, x^\alpha D^\alpha \varphi(sx)\, ds\, dx}_{I_2}
\end{aligned}$$

Posons $y = sx$ alors $x = y/s$ et $dx = s^{-N}dy$. De ce fait, on a :

$$I_2 \;=\; \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^1 (1-s)^k f\Big(\frac{y}{s}\Big)\,\frac{y^\alpha}{s^{N+|\alpha|}}\,D^\alpha\varphi(y)\,ds\,dy.$$

Par ailleurs, en posant

$$F_\alpha(y) := \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\int_0^1 (1-s)^k\,\frac{y^\alpha}{s^{N+|\alpha|}}\,f\Big(\frac{y}{s}\Big)\,ds, \tag{4.15}$$

on obtient, par intégration par parties (définition de D^α au sens des distributions),

$$\langle u_0,\varphi\rangle = \sum_{|\beta|\leqslant k}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!}\Big(\int u_0(x)\,x^\beta dx\Big)\langle D^\beta\delta,\varphi\rangle + \sum_{|\alpha|=k+1}\langle D^\alpha F_\alpha,\varphi\rangle,$$

Pour estimer $\|F_\alpha\|_{L^p}$, on applique Minkowski et on utilise $|y^\alpha|\leqslant C|y|^{k+1}$:

$$\|F_\alpha\|_{L^p} \leqslant C\int_0^1 (1-s)^k s^{-N-(k+1)}\,\big\||y|^{k+1}f(y/s)\big\|_{L^p_y}\,ds.$$

Or $\|f(\cdot/s)\|_{L^p} = s^{N/p}\|f\|_{L^p}$, d'où

$$\|F_\alpha\|_{L^p} \leqslant \left(C\int_0^1 (1-s)^k\,s^{-N-(k+1)+N/p}\,ds\right)\cdot\;\||x|^{k+1}f\|_{L^p}$$

La convergence au voisinage de $s=0$ impose $-N-(k+1)+\frac{N}{p} > -1$, i.e.

$$\frac{N}{p} > N+k \qquad\Longleftrightarrow\qquad p\leqslant\frac{N}{N-1},$$

et il n'y a pas de contrainte au voisinage de $s=1$ grâce au facteur $(1-s)^k$.
Le raisonnement précédent donne, sans perte,

$$\sum_{|\alpha|=k+1}\|F_\alpha\|_{L^p} \;\leqslant\; C\,\||x|^{k+1}f\|_{L^p},$$

car la somme sur $|\alpha|=k+1$ ne change que la constante.

■

Nous allons à présent prouver le théorème 4.2.2 grâce à ce lemme.

Preuve. En appliquant le lemme 4.2.3, on a :

$$u_0 \;=\; \sum_{|\alpha|\leqslant k}\frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,x^\alpha\,dx\right)D^\alpha\delta \;+\; \sum_{|\alpha|=k+1} D^\alpha F_\alpha, \tag{4.16}$$

où $F_\alpha\in L^p(\mathbb{R}^N)$ et où, de plus, l'application $u_0\mapsto(F_\alpha)_{|\alpha|=k+1}$ est continue avec une majoration

$$\sum_{|\alpha|=k+1}\|F_\alpha\|_{L^p} \;\leqslant\; C_{p,k,N}\,\big\||x|^{k+1}f\big\|_{L^p}.$$

Il vient alors que (sachant que $\phi * D^\alpha \delta = D^\alpha \phi$ (voir (Reg) du chapitre 1)) :

$$u(\cdot,t) = G(\cdot,t) * u_0 \;=\; \sum_{|\alpha|\leqslant k} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\left(\int u_0(x)\, x^\alpha\, dx\right) D^\alpha G(\cdot,t) \;+\; \underbrace{\sum_{|\alpha|=k+1} \big(D^\alpha G(\cdot,t)\big) * F_\alpha}_{:=R(\cdot,t)}.$$

Fixons $r \in [1,\infty]$ tel que

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \qquad \big(\text{possible car } p \leqslant q \leqslant \infty\big). \tag{4.17}$$

Par l'inégalité de Young,

$$\|R(\cdot,t)\|_{L^q} \;\leqslant\; \sum_{|\alpha|=k+1} \|D^\alpha G(\cdot,t)\|_{L^r}\, \|F_\alpha\|_{L^p}.$$

Par ailleurs, en utilisant la loi d'échelle (voir la sous-section 2.2.1 du chapitre 2), on a : $G(x,t) = t^{-N/2} G(x/\sqrt{t},1)$. En dérivant, on obtient :

$$D^\alpha G(\cdot,t)(x) = t^{-\frac{N}{2}-\frac{|\alpha|}{2}} \left(D^\alpha G(\cdot,1)\right)\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right).$$

Par changement de variable $y = x/\sqrt{t}$, on obtient pour tout $1 \leqslant r \leqslant \infty$:

$$\|D^\alpha G(\cdot,t)\|_{L^r} = C_{N,\alpha,r}\, t^{-\frac{|\alpha|}{2}-\frac{N}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)}, \qquad C_{N,\alpha,r} = \|D^\alpha G(\cdot,1)\|_{L^r} < \infty. \tag{4.18}$$

En combinant Young, (4.18) et la majoration sur les F_α,

$$\|R(\cdot,t)\|_{L^q} \;\leqslant\; \Big(\sum_{|\alpha|=k+1} C_{N,\alpha,r}\Big)\, t^{-\frac{k+1}{2}-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})} \sum_{|\alpha|=k+1} \|F_\alpha\|_{L^p} \;\leqslant\; C\, t^{-\frac{k+1}{2}-\frac{N}{2}(1-\frac{1}{r})}\, \big\||x|^{k+1} f\big\|_{L^p}.$$

Or, d'après (4.17), $1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. Il vient donc

$$\|R(\cdot,t)\|_{L^q} \;\leqslant\; C\, t^{-\frac{k+1}{2}-\frac{N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \;=\; C\, t^{-\frac{N}{2}\left(\frac{k+1}{N}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\, \big\||x|^{k+1} f\big\|_{L^p},$$

■

En conclusion, nous avons aussi un résultat de convergence en norme du premier moment.

Théorème 4.2.4 (C.f [7]) *Sous les hypothèses que $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et que les premier, second et troisième moments sont finis, nous obtenons la convergence*

$$\left\| u(x,t) - M\, G_t(x) + \sum_i \mathcal{N}_{1,i}\, \partial_{x_i} G_t(x) \right\|_{L^1(|x|dx)} \leqslant C\, t^{-1/2}. \tag{4.19}$$

La constante $C > 0$ dépend de u_0 via les moments d'ordre deux et trois.

Preuve. (i) On commence avec les formules du Théorème (4.2.1), où il est prouvé que

$$|u(x,t) - M\,G_t(x) + \sum_i \mathcal{N}_{1,i}\,\partial_{x_i} G_t(x)| = D_2$$

avec

$$D_2 = (4\pi t)^{-(N+2)/2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 |y|^2 u_0(y) \left(-\frac{1}{2} + (\langle \widehat{y}, \xi \rangle)^2 \right) e^{-\xi^2}\, dyds,$$

et $\xi = (x - sy)/2\sqrt{t}$. En multipliant par $|x|$ et en intégrant, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} D_2\,|x| dx = (4\pi t)^{-(N+2)/2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 |y|^2 u_0(y) \left(-\frac{1}{2} + (\langle \widehat{y}, \xi \rangle)^2 \right) e^{-\xi^2}\, |x| dx\, dyds.$$

En écrivant maintenant $|x| \leqslant 2|\xi|\sqrt{t} + s|y|$, on divise l'estimation supérieure de cette intégrale en $I_1 + I_2$, où

$$I_1 = Ct^{-(N+1)/2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 |y|^2 u_0(y) \left(-\frac{1}{2} + (\langle \widehat{y}, \xi \rangle)^2 \right) e^{-\xi^2}\, 2|\xi| dx\, dyds\,,$$

et

$$I_2 = Ct^{-(N+2)/2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 |y|^2 u_0(y) \left(-\frac{1}{2} + (\langle \widehat{y}, \xi \rangle)^2 \right) e^{-\xi^2}\, s|y| dx\, dyds\,.$$

• **Estimation de I_1.** Effectuons le changement de variable

$$x \mapsto \xi = \frac{x - sy}{2\sqrt{t}} \qquad \text{(pour } s \text{ fixé et } y \text{ fixé)},$$

donc $x = 2\sqrt{t}\,\xi + sy$ et le jacobien vaut $dx = (2\sqrt{t})^N\, d\xi = 2^N\, t^{N/2}\, d\xi$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} I_1 &\leqslant C\,t^{-(N+1)/2}\,t^{N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 |y|^2\,|u_0(y)| \left| -\tfrac{1}{2} + (\langle \widehat{y}, \xi \rangle)^2 \right| e^{-|\xi|^2}\,|\xi|\, d\xi\, dy\, ds \\ &\leqslant C\,t^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 |y|^2\,|u_0(y)| \left| -\tfrac{1}{2} + (\langle \widehat{y}, \xi \rangle)^2 \right| e^{-|\xi|^2}\,|\xi|\, d\xi\, dy\, ds \\ &\leqslant C\,t^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^N} |y|^2\,|u_0(y)| \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| -\tfrac{1}{2} + (\langle \widehat{y}, \xi \rangle)^2 \right| |\xi|\, e^{-|\xi|^2}\, d\xi \right) dy. \end{aligned}$$

Or, pour tout vecteur unitaire $\widehat{y}$, la fonction $\xi \mapsto \left| -\frac{1}{2} + (\langle \widehat{y}, \xi \rangle)^2 \right| |\xi| e^{-|\xi|^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^N$. En effet,

$$\left| -\tfrac{1}{2} + (\langle \widehat{y}, \xi \rangle)^2 \right| |\xi| \leqslant \widetilde{C}(1 + |\xi|^3)$$

et la gaussienne $e^{-|\xi|^2}$ garantit que $\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |\xi|^3) e^{-|\xi|^2}\, d\xi < \infty$. Ainsi l'intégrale en ξ est une constante finie dépendant seulement de N. Par conséquent

$$I_1 \leqslant C\,t^{-1/2} \int_{\mathbb{R}^N} |y|^2\,|u_0(y)|\, dy = C\,\widetilde{C}\,t^{-1/2}\,\mathcal{N}_2(u_0).$$

• **Estimation de I_2.** Procédons de même pour I_2. Après le même changement de

variable $x \mapsto \xi$ on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant C\,t^{-(N+2)/2}\,t^{N/2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^1 |y|^3\,|u_0(y)|\,\big|-\tfrac{1}{2}+(\langle\widehat{y},\xi\rangle)^2\big|\,e^{-|\xi|^2}\,s\,d\xi\,dy\,ds \\ &\leqslant C\,t^{-1/2}\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^1 |y|^3\,|u_0(y)|\,\big|-\tfrac{1}{2}+(\langle\widehat{y},\xi\rangle)^2\big|\,e^{-|\xi|^2}\,s\,d\xi\,dy\,ds \\ &\leqslant C\,t^{-1}\int_{\mathbb{R}^N}|y|^3\,|u_0(y)|\,\Big(\int_0^1 s\,ds\Big)\,\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\big|-\tfrac{1}{2}+(\langle\widehat{y},\xi\rangle)^2\big|\,e^{-|\xi|^2}\,d\xi\Big)\,dy \\ &\leqslant \frac{1}{2}C\,t^{-1}\int_{\mathbb{R}^N}|y|^3\,|u_0(y)|\Big(\int_{\mathbb{R}^N}\big|-\tfrac{1}{2}+(\langle\widehat{y},\xi\rangle)^2\big|\,e^{-|\xi|^2}\,d\xi\Big)\,dy \end{aligned}$$

Comme précédemment, l'intégrale en ξ est finie et dépend seulement de N. Ainsi

$$I_2 \leqslant C\,t^{-1}\int_{\mathbb{R}^N}|y|^3\,|u_0(y)|\,dy = C\,t^{-1}\,\mathcal{N}_3(u_0),$$

Sous les hypothèses que les seconds et troisièmes moments sont finis et en regroupant les deux contributions,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|D_2|\,|x|\,dx \leqslant I_1 + I_2 \leqslant C\,t^{-1/2}\,\mathcal{N}_2(u_0) + C\,t^{-1}\,\mathcal{N}_3(u_0).$$

Pour $t \geqslant 1$ le terme $t^{-1}\,\mathcal{N}_3(u_0)$ est négligeable devant $t^{-1/2}$; pour t petit on peut aussi absorber les facteurs numériques dans une constante (on cherche ici le comportement en $t \longrightarrow \infty$). On en déduit l'existence d'une constante C (dépendant de $N, \mathcal{N}_2(u_0), \mathcal{N}_3(u_0)$) telle que

$$\Big\| u(\cdot,t) - M\,G_t + \sum_i \mathcal{N}_{1,i}\,\partial_{x_i}G_t \Big\|_{L^1(|x|\,dx)} \leqslant C\,t^{-1/2},$$

■

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié de manière détaillée la convergence des solutions de l'équation de la chaleur vers la solution fondamentale gaussienne, en mettant en lumière le rôle des moments de la donnée initiale. Nous avons montré que la vitesse de convergence dépend fortement de la structure de la donnée initiale, notamment de la concentration ou de la dispersion de la masse.

Nous avons d'abord établi la convergence vers la solution fondamentale G_t lorsque la donnée initiale u_0 est une mesure intégrable de masse finie. En exploitant le développement de Taylor de la gaussienne et les propriétés des moments d'ordre 1 et 2, nous avons obtenu des estimations précises du type :

$$\|u(\cdot,t) - MG_t\|_1 = O(t^{-1/2}) \quad \text{et} \quad \|u(\cdot,t) - MG_t(\cdot - x_c)\|_1 = O(t^{-1}),$$

où x_c est le centre de masse et M la masse totale.

Nous avons également démontré que ces taux de convergence sont optimaux sous les seules hypothèses de finitude des moments d'ordre un ou deux. En effet, il existe des distributions pour lesquelles aucun taux plus rapide ne peut être atteint si l'on ne suppose pas plus de régularité ou de décroissance à l'infini.

Enfin, nous avons présenté un résultat d'ordre supérieur, illustrant que, sous des hypothèses plus fortes sur la décroissance de la donnée initiale (existence des moments d'ordre trois et plus), on peut raffiner le développement asymptotique de la solution à l'aide de dérivées de la gaussienne pondérées par les moments correspondants.

En conclusion, ce travail met en évidence l'interaction profonde entre les outils d'analyse fonctionnelle, les développements asymptotiques et les concepts probabilistes dans l'étude des équations de la chaleur. Il ouvre la voie à des généralisations possibles, notamment vers des équations non linéaires de type diffusion, ou vers des cadres métriques plus généraux (espaces à courbure, variétés, etc.), où des phénomènes similaires de convergence asymptotique peuvent être étudiés.

Bibliographie

[1] H. Brézis. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer, New York, 2010.

[2] J. Duoandikoetxea and E. Zuazua. Moments, masses de dirac et décomposition de fonctions. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série I. Mathématique, 315(6) :693–698, 1992.

[3] L. C. Evans. Partial Differential Equations. American Mathematical Society, 2010.

[4] J. Fourier. Théorie analytique de la chaleur. Firmin Didot, Paris, 1822. Disponible en ligne sur https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1045508v.

[5] S. Salsa and G. Verzini. Partial Differential Equations in Action : From Modelling to Theory. UNITEXT. Springer, 2022. Ouvrage pédagogique alliant modélisation et théorie des EDP.

[6] J. L. Vázquez. The Porous Medium Equation : Mathematical Theory. Oxford University Press, Oxford, 2017.

[7] J. L. Vázquez. Asymptotic behaviour methods for the heat equation. convergence to the gaussian. arXiv preprint arXiv :1706.10034, 2018.